



TITLE:

渦度方程式の数値解析およびアナ
ログ・シミュレーションに関する
研究(Dissertation_全文)

AUTHOR(S):

立山, 尚武

CITATION:

立山, 尚武. 渦度方程式の数値解析およびアナログ・シミュレーション
に関する研究. 京都大学, 1970, 工学博士

ISSUE DATE:

1970-01-23

URL:

<https://doi.org/10.14989/doctor.k956>

RIGHT:

渦度方程式の数値解析および
アナログ・シミュレーションに関する研究

昭和 44 年 5 月

立 山 尚 武

過 度 方 程 式 の 数 値 解 析 お よ び
アナログ・シミュレーションに関する研究

昭和 4 4 年 5 月

立 山 尚 武

DOC

1969

2

電気系

目 次

まえがき	1
第1部 デジタル計算機による数値解析	5
第1章 渦度方程式 数値予報の基本式	7
1.1 基本方程式	7
1.1.1 運動方程式	7
1.1.2 連続方程式	11
1.1.3 熱力学の方程式	16
1.2 二次元の渦度方程式	13
1.3 三次元の渦度方程式	15
1.3.1 相当順圧大気モデル	16
1.3.2 傾圧大気モデルの渦度方程式	18
1.3.3 ω 方程式	19
1.4 渦度方程式の計算方法	22
1.4.1 地球の曲率に対する補正	23
1.4.2 計算方式	24
第2章 ブロック反復法による楕円型偏微分方程式の解法	27
2.1 ポアッソンの方程式の差分近似式	27
2.2 行列のノルムおよびスペクトル半径	31
2.3 グラフ理論による行列の性質の判定	33
2.4 行列方程式の基本的反復法	38
2.5 平均収束率	40
2.6 ブロック反復法	43
2.7 ポアッソン方程式の5点ブロック・ガウスザイデル法	45
2.8 数値計算例	54
第3章 非対称パラメーターを用いたADI法(ADIN法)	59
3.1 行列方程式	59

3・2	基本的なADI法	61
3・3	非対称パラメータを用いたADI法(ADIN法)	62
3・4	ADIN法の収束定理	64
3・5	ADIN法の収束率	67
3・6	ADIN法のパラメーターの決定	72
3・7	数値計算例	85

第4章 渦度方程式の数値解法 98

4・1	境界条件	98
4・2	渦度方程式の差分近似	99
4・3	計算安定度	103
4・4	数値計算に用いた領域	106
4・5	中央差分方式のプログラム	109
4・6	風上差分方式のプログラム	110
4・7	5点領域に対するプログラム	111
4・8	6×6および11×11領域における計算	112
4・9	5点領域における計算	122

第2部 渦度方程式のアナログ・シミュレーション 129

第5章 渦度方程式の差分微分方程式 131

5・1	二次元の渦度方程式の差分微分方程式への変換	131
5・2	差分微分方程式の安定問題	134

第6章 ポアッソンの方程式およびヤコビアンの方の計算

	回路	137
6・1	ポアッソンの方程式の演算回路	137
6・2	1/4自乗掛算器	138
6・3	1/4自乗掛算器の誤差	142
6・3・1	ダイオードの電圧電流特性	142
6・3・2	ダイオードの特性にもとづく1/4自乗掛算器の誤差	143

6・4	ヤコビアン式の計算回路	147
6・5	ヤコビアン項の計算回路素子とその特性	150
オ7章	シミュレーター回路の設計	159
7・1	渦度方程式のデイメンション	159
7・2	変換係数の決定	161
7・3	シミュレーター回路の構成	164
オ8章	シミュレーターによる渦度方程式の数値計算例	169
8・1	南北方向に一定傾斜をもつ初期値分布の場合	169
8・2	等圧面高度が Z_{00} において極大値をもつような錐 面を形成する初期値分布の場合	171
8・3	ステップ状に等圧面高度が分布している場合	174
オ9章	結言	180
	謝辞	183

付録1 固定座標系及び回転座標系におけるベクトルの微分

付録2 (1・1・7), (1・1・8)及び(1・1・9)式の誘導

付録3 SOR法の最適加速係数に関するKulsrudの推定法

付録4 (3・6・9)式の証明

付録5 非対称パラメータを用いたADI法のFORTRANプログラム

付録6 中央差分方式による渦度方程式の解を求めるためのプログラム

付録7 風上差分方式により渦度方程式の解を求めるためのプログラム

付録8 5点領域において渦度方程式の解を求めるためのプログラム

参考文献

ま え が き

気象の数値予報の方程式は、ニュートンの運動方程式、連続方程式、熱力学の方程式およびボイル・シャルルの方程式から成立っている。もし熱源の分布が既知であれば、この流体力学の方程式は、6個の未知量即ち温度、気圧、密度および速度の三成分を含む6個の連立方程式となる。この式は、既に1858年にVon Helmholtzによって与えられた。しかしながら、この式を解くには、6元の実数微分方程式の境界値問題及び初期値問題を解かねばならない。このような問題を解析的に解く方法は今日に到るまでに発見されていない。従って、残された解法は数値計算によるものである。この問題の研究は20世紀の初頭にノールウェーの気象学校の人人(Vilhelm Bjerknes, Solberg, Godske, J. Bjerknes)によって行なわれた。彼等の研究は主として観測態勢の不備によって、失敗したけれども、原理上、数値計算によって解くことが出来る予報方程式を発見した。

この方程式は、気圧、渦度等の変数の或場所における時間に関する微分値を同じ系における変数の空間微分の項によって表わしている。従って或短い時間間隔で逐次積分を繰返すことによって予測値を計算できる。この方法の可能性を最初に確かめたのはL. F. Richardsonである。彼は才1次大戦の最中に、非線形の予報方程式を差分法でとくことを計画し、数ヶ月を費して、手計算を遂行した。この結果を1922年に出版したのが有名な"Weather Prediction by Numerical Process"である。

その後1940年代の初めに電子計算機が誕生するまでは、誰もこの問題に手をつけなかった。しかしこの間に気象観測組織が整備され、大気の巨視的な運動が明らかになった。また1946年に至って各種の電子計算機が設計製作され、手動計算の約10,000倍の計算速度が可能になった。これに伴い、1946年に、米国のプリンストン高級研究所において、Von NeumannおよびJ. G. Charney等が、数値予報の研究計画を樹立して以来、このことが刺戟になって、英国、ノールウェー、ソ連、西独および日本等の各国において、この研究が開始された。この研究の才一段階の目標は各種の誤差を分離、解析して除去することであった。次の約10年間に於ける研究の

対象は、気象学上余り意味のない音波および他の周波数の高い成分を、計算式の解から除く、所謂“Filtering”の問題がとり上げられた。この研究は最初、1948年にCharneyによって行なわれ音波と重力波を濾波するために、地衡風近似とハイドロスタチックの近似が導入された。

このモデルによる計算は、1950年にCharney, Fjörtoft および Von Neumann によって発表されている。この数値予報の式は、予期したよりも簡単な形をもち、プログラムも容易であって、結果は、今迄の天気予報によるものと同程度の精度を示したので、数値予報の将来に明るい見通しを与えた。しかし、このモデルは所謂渦度保存則を基礎としているので、渦度の発達と衰弱が存在する実際の大気の運動と一致するものではない。1951年からは実際の大気の運動をよく表わす大気モデルの研究に努力が向けられて、今迄に多くの提案が発表されている。現在は三次元モデルによる数値予報が、一部に現業として行なわれており、このモデルの研究は発展段階にある。

三次元モデルにおいては、位置のエネルギーの運動エネルギーへの変換を計算に含めるために方程式は複雑になる。このため研究の目標は、少しでも順圧大気モデルとの類似性および関連性を見出して、モデルを単純化する方向に向けられている。三次元モデル（或は傾圧大気モデル）における渦度方程式の形は、二次元の渦度方程式に水平方向の風速の発散項が加わったものである。三次元モデルの予報方程式の取扱いは、気象学的考察と近似が主であって、数値解析上の見地からは、二次元モデルの問題が基礎となっている。従って本論文においては、基礎的考察として、二次元における渦度方程式をとり扱っている。

オ1部においては渦度方程式のデジタル計算機による数値解析を論じている。渦度方程式は(1, 2, 9)式に示すようにポアッソンの方程式とその常数項の時間についての偏微分方程式との連立方程式である。渦度方程式の数値解析は、ポアッソンの方程式の数値解法及び時間に関しての逐次積分法の二つに大別される。

オ1章においては渦度方程式およびその計算体系について説明している。オ2章においては、一般に、楕円型偏微分方程式のブロック反復法について

述べ、筆者が考察した、5点ブロック反復法についてその計算速度をガウスザイデル法およびLSOR法と比較して論じている。オ3章においては、更に行列方程式の反復法として有効なADI法について考察し、筆者の考察した非対称パラメータを用いるADI法(ADIN法とよぶことにする)の収束性と計算速度について論じている。

オ4章においては、渦度方程式の逐次積分法について説明している。逐次積分の際に被積分項であるヤコビアン項の計算方式としては、中央差分方式及びForsythおよびWasowが提唱している風上差分方式を用いることができる。本章では、中央差分方式と風上差分方式について説明すると共に、この両方式の相関関係を例題の計算結果について比較している。

なお例題としては、オ2部における、渦度方程式のアナログ・シミュレーションの結果と対照するため5点領域に対する、例題の解を求めている。

オ2部においては渦度方程式のアナログ・シミュレーションについて考察している。渦度方程式の数値計算は、従来、デジタル計算機によって行なわれているが、こゝでは二次元の渦度方程式についてアナログシミュレーションを行ない、デジタル計算機による解との比較を試みたものである。

オ5章においては、まづ渦度方程式の差分微分方程式への変換について述べ、安定性について検討している。

オ6章においては、ポアッソンの方程式のアナログ計算機による計算方式および被積分項であるヤコビアン項の計算回路について考察している。

オ7章においては、ポアッソンの方程式およびヤコビアン項の計算回路をもとにして、渦度方程式のシミュレーター回路の設計について説明している。

オ8章においては、例題をアナログシミュレーターによって解き、この結果をオ4章で求めたデジタル計算機による計算結果と比較し、両者による解がよく一致することを示している。

オ9章は本論文の結論であり、各章で得られた主な事項及び将来の見通しについて述べている。

4 項欠

第1部 デジタル計算機による数値解析

6 項欠

第一部 デジタル計算機による数値解析

第一章 渦度方程式 数値予報の基本式

渦度方程式は気象学において、数値予報の基本式を形成するものであって、大気の運動を表すものである。渦度方程式の形は、大気モデルの種類によって、やや異なっている。

渦度とは、風速ベクトルの回転 (Curl) を意味する。数値予報において用いられる大気モデルには、順圧大気モデル (Barotropic model), 相当順圧大気モデル (Equivalent barotropic model), および傾圧大気モデル (Baroclinic model) がある。これらのモデルにおいて大気中の任意の点の、任意の時刻における状態は風速 V , 気圧 P , 密度 ρ , および温度 T によって決定される。数値予報の基本式は、大気の運動方程式、連続方程式、熱力学の方程式および状態方程式から導かれる。

1. 1 基礎方程式

1. 1. 1 運動方程式

地球は極軸の周りを、一定速度で回転している。回転軸は絶対座標系に対して、その方向がほぼ一定である。従って地球の公転と共に動く慣性系に対して、完全な回転体とみなすことができる。地球を完全な球形と考えその半径を a ($a = 6371 \text{ Km}$) とする。今、地球の中心に原点をもち慣性系に固定した直角座標系を Xa, Ya, Za とし、この座標系と原点を共有し、角速度 Ω で一定方向に回転する座標系を x, y, z とする。このとき位置ベクトル r の時間微分は

$$\frac{da}{dt}r = \frac{dr}{dt} + \Omega \times r \quad (1.1.1)$$

となる (附録 1)。 da/dt および d/dt はそれぞれ慣性固定座標系および回転座標系に関する微分を表すものである。

固定座標系から見た速度を V_a , 回転座標系から見た速度を V とすると、
(1.1.1) 式はつぎのように書ける。

$$V_a = V + \Omega \times r \quad (1.1.2)$$

(1.1.1) 式の関係は r のみならず、任意のベクトルに対して成立するから、

$$\frac{daV_a}{dt} = \frac{dV_a}{dt} + \Omega \times V_a \quad (1.1.3)$$

(1.1.3) 式に (1.1.2) 式を代入すると、

$$\begin{aligned} \frac{daV_a}{dt} &= \frac{d}{dt}(V + \Omega \times r) + \Omega \times (V + \Omega \times r) \\ &= \frac{dV}{dt} + 2\Omega \times V + \Omega \times (\Omega \times r) \quad (1.1.4) \end{aligned}$$

となる。 V は回転座標系に関する速度、 $2\Omega \times V$ はコリオリの加速度、 $\Omega \times (\Omega \times r)$ は求心力を表すものである。

R を回転軸と垂直な平面への r の射影とすれば、

$$\begin{aligned} \Omega \times (\Omega \times r) &= \Omega \times (\Omega \times R) = \Omega(R \cdot \Omega) - R(\Omega \cdot \Omega) \\ &= -\Omega^2 R \quad (1.1.5) \end{aligned}$$

となる。 Ω は Ω の絶対値で、地球の回転角速度である。

ニュートンの第2法則によって、地球に対する単位質量の運動方程式はつぎのようになる。

$$\frac{daV_a}{dt} = \frac{dV}{dt} + 2\Omega \times V - \Omega^2 R = P + g^* + F \quad (1.1.6)$$

ここで P は気圧の場所的変化による力、 g^* は萬有引力、 F は単位質量当りの粘性力である。静止海面に対して、面に垂直に働く見かけの重力の加速度を g とすると $g = g^* + \Omega^2 R$ である。気象学上の取扱いを容易にするために、(1.1.6) 式を回転球面座標系で表わすことを考える。このため、回転座標系の原点を、球面上の任意の点に移す。そしてこの球面に接する平面上で、東向きに x 軸、北向きに y 軸、面に垂直外方に z 軸をとる。このとき加速度 g の方向は z 軸と逆向きになる。(1.1.6) 式のこの座標系に対する各成分を求めると次のスカラー方程式をうる(付録2)。

$$\frac{du}{dt} - \frac{uv \tan \phi}{a} + \frac{uw}{a} - 2\Omega v \sin \phi + 2\Omega w \cos \phi = P_x + F_x \quad (1.1.7)$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{u^2 \tan \phi}{a} + \frac{vw}{a} + 2\Omega u \sin \phi = P_y + F_y \quad (1.1.8)$$

$$\frac{dw}{dt} - \frac{u^2 + v^2}{a} - 2\Omega u \cos \phi = P_z + F_z - g \quad (1.1.9)$$

ここに、 u, v, w はそれぞれ V の x, y, z 方向の成分である。 ϕ は緯度。 P_x, P_y, P_z は x, y, z 方向の P の成分、 F_x, F_y, F_z は粘性力 F の各成分である。今、ここで (1.1.7) ~ (1.1.9) 式を簡単化するため各項の大きさを吟味してみよう。気圧傾度の力とコリオリの因子とは、一般に釣り合っているので、(1.1.7) 式における P_x と $2\Omega v \sin \phi$ の大きさは同程度であって、もし $\frac{du}{dt}$ の値が零でないとすれば、 $\frac{du}{dt}$ の値は $2\Omega v \sin \phi$ 及び P_x よりも一桁小さい値を持っている。(1.1.8) 式の $P_y, 2\Omega u \sin \phi$ 及び $\frac{dv}{dt}$ についても同様である。Charney の行なった解析結果によれば、コリオリの因子に比べて、その大きさが二桁以上回る項は (1.1.7) ~ (1.1.9) 式から省略できる。

中緯度における大気の大循環では、垂直方向の速度 w の大きさは数 cm/sec であるが、水平方向の速度成分は 10^3 cm/sec 台である。従って、Charney の解析結果を満足する近似度に対して、次の不等式が成立する。

$$\left| \frac{vw}{a} \right| \ll fu ; \quad \left| \frac{uw}{a} \right|, |2w\Omega \cos \phi| \ll |fv| ; \quad f = 2\Omega \sin \phi$$

更に、東向き相対角速度を ω_E とすれば、 $u = \omega_E a \cos \phi$ となるので、(1.1.7) 式において、

$$2\Omega v \sin \phi + \frac{uv \tan \phi}{a} = 2\Omega v \sin \phi \left(1 + \frac{\omega_E}{2\Omega} \right)$$

となる。同様に (1.1.8) 式において、

$$-2\Omega u \sin \phi + \frac{u^2 \tan \phi}{a} = -2\Omega u \sin \phi \left(1 + \frac{\omega_E}{2\Omega} \right)$$

となる。従って (1.1.7) 及び (1.1.8) 式はつぎのようになる。

$$\frac{du}{dt} - fv \left(1 + \frac{\omega_E}{2\Omega} \right) = P_x + F_x$$

$$\frac{dv}{dt} + fu \left(1 + \frac{\omega_E}{2\Omega}\right) = Py + Fy$$

ここに $f = 2\Omega \sin\phi$ を示し、この二式中 $\frac{\omega_E}{2\Omega}$ の値は 1×10^{-1} 以下である。例えば風速 100 ノットの比較的強い東向きの風を考えると

$$\omega_E = 0.785 \times 10^{-5} \text{ radian/sec}$$

$$2\Omega = 2 \times 7.292 \times 10^{-5} \text{ radian/sec}$$

であって、 $\frac{\omega_E}{2\Omega} \sim \frac{1}{20}$

である。この値は fu 及び fv の値に比べ無視しうる程は小さくないが、この項を無視しても、近似式の解が、実際の大气における観測結果と実験的によく一致している。従って、(1・1・7) 及び (1・1・8) 式の代りに次の近似式が得られる。

$$\frac{du}{dt} - fv = Px + Fx \quad (1 \cdot 1 \cdot 10)$$

$$\frac{dv}{dt} + fu = Py + Fy \quad (1 \cdot 1 \cdot 11)$$

つぎに (1・1・9) 式について考える。大气の大きな擾乱に対して、 ρ 1 項、 ρ 2 項および ρ 3 項の大きさはそれぞれ 10^{-4} 、 10^{-2} 、および $1 \text{ cm} \cdot \text{sec}^{-2}$ である。一方 G は $10^3 \text{ cm} \cdot \text{sec}^{-2}$ である。従って (1・1・9) 式の左辺は右辺に対して無視できる。又粘性による垂直方向の加速度も無視できるから、(1・1・9) 式は次式で近似される。

$$Pz - g = 0 \quad (1 \cdot 1 \cdot 12)$$

いかえると、気象学では大气を常に静的平衡状態にあるとみなしていることを意味する。そして大气の大規模な運動においては、粘性による水平方向の力も、コリオリの力および気圧傾度の力にくらべて無視することができる。

気圧傾度による力の各成分は、

$$Px = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x}, \quad Py = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y}, \quad Pz = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z}$$

であるから、これらを(1・1・10), (1・1・11), および(1・1・12)式に代入すると次式が得られる。

$$\frac{du}{dt} - fv + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = 0 \quad (1 \cdot 1 \cdot 13)$$

$$\frac{dv}{dt} + fu + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \quad (1 \cdot 1 \cdot 14)$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} + g\rho = 0 \quad (1 \cdot 1 \cdot 15)$$

これらの近似式が、一般に大気の運動の解析に使われる。(1・1・13)(1・1・14)式をベクトル式で表わすと、

$$\frac{dV}{dt} + K \times fV + \frac{1}{\rho} \nabla P = 0 \quad (1 \cdot 1 \cdot 16)$$

となる。

V は水平面上への風速ベクトルの射影、 K は垂直方向の単位ベクトル、 ∇ は二次元のグラジエントである。(1・1・16)式の才1項と他の2項の大きさを比較すると、才1項は $10^{-2} \text{ cmsec}^{-2}$ 、才2項、才3項は $10^{-1} \text{ cmsec}^{-2}$ である。このため水平方向の加速度 dV/dt を無視することはできない。しかしコリオリの力と気圧傾度の力が平衡して、完全に相殺するものと考えるとき、次の地衡風近似の式が得られる。

$$V = K \times \frac{1}{\rho f} \nabla P \quad (1 \cdot 1 \cdot 17)$$

この式は、風向は等高線に平行で、そのときの風速は気圧傾度に比例することを意味している。

1・1・2 連続方程式

大気の大規模な運動に対しては、流体力学における、質量保存則が成立する。大気の密度を ρ とすると連続の式は次式で与えられる。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) - \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) - \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) \quad (1 \cdot 1 \cdot 18)$$

この式の右辺を計算して、 ρ の全微分に当る項をまとめて $d\rho/dt$ に直すと、

次式の形になる。

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0 \quad (1.1.19)$$

流体を非圧縮流体と考えると $d\rho/dt = 0$ であるから、

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (1.1.20)$$

なる関係が成立する。

1.1.3 熱力学方程式

動的予報理論において、重要な法則の一つは、熱力学の第一法則である。熱力学の第一法則は次式で与えられる。

$$\frac{dq}{dt} = C_v \frac{dT}{dt} + P \frac{d\alpha}{dt} \quad (1.1.21)$$

ここに、 dq/dt は空気の単位質量当りの熱量の時間に関する微分、 C_v は定積比熱、 α は単位質量の占める容積である。上式の右辺第1項は空気の単位質量当りの内部エネルギーの増加率を表わす。第2項は単位質量が圧力に対して行う仕事の増加率である。断熱変化の場合は $dq/dt = 0$ であるから

$$C_v \frac{dT}{dt} + P \frac{d\alpha}{dt} = 0 \quad (1.1.22)$$

となる。一方ボイルシャルルの法則 $P\alpha = RT$

を t について微分し (1.1.22) 式に代入すると次式をうる。

$$C_p \frac{dT}{dt} - \alpha \frac{dP}{dt} = 0 \quad (1.1.23)$$

ここで、 C_p は定圧比熱で、 $C_p = C_v + R$ である。 R は空気の気体常数である。この式を $C_p T$ で割って書直すと、

$$\frac{1}{T} \frac{dT}{dt} - \frac{k}{P} \frac{dP}{dt} = 0 \quad (1.1.24)$$

ここに k は $k = R/C_p$ である。 k は常数であるから (1.1.24) 式を積分すると、 $T/P^k = \text{Const.}$ なる関係がある。今 P_0 を任意の基準気圧とし、そのときの温度を θ とすると、

$$\frac{T}{p^k} = \frac{\theta}{p_0^k}, \quad \theta = T \left(\frac{p_0}{p} \right)^k \quad (1.1.25)$$

となる。 P_0 を1000ミリバール($10^3 \text{ dyne cm}^{-2}$)とえらんだとき、 θ をその空気の温位(Potential temperature)という。

(1.1.24)式は又次のように書ける。

$$\frac{d}{dt} T \left(\frac{P_0}{P} \right)^k = 0 \quad (1.1.26)$$

$$\text{即ち} \quad \frac{d\theta}{dt} = 0 \quad (1.1.27)$$

この式から断熱変化を行う過程においては、温位が保存されることを示す。

断熱変化をしない一般の場合には、

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\theta}{C_p T} \frac{dq}{dt} \quad (1.1.28)$$

である。上の(1.1.13), (1.1.14), (1.1.15), (1.1.19), (1.1.23)および(1.1.27)式は6個の変数 u , v , w , p , ρ および T を含んでいる。これらの式はそれぞれ独立であるから、これらの式を連立方程式として解くことができる。しかしこれらの式は(1.1.28)式の dq/dt が求まらないと完全ではない。 dq/dt の値を求めることは困難であるので、現在は $dq/dt = 0$ とした近似式(1.1.27)式を用いている。

1.2 二次元の渦度方程式

大気を、非圧縮、非粘性、等密度の流体とみなして、取扱うものを、順圧大気モデルという。このような大気モデルでは、大気中における等圧面と等密度面とが一致しており、三次元の運動は、収斂、発散のない二次元の運動として考えることができる。このモデルに対しては平衡状態において次の関係が成立する。

$$\frac{\partial p}{\partial x} = g\rho \frac{\partial z}{\partial x} \quad (1.2.1)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = g\rho \frac{\partial z}{\partial y} \quad (1.2.2)$$

ここで、 z は等圧面高度を表わしている。

この関係を使って、(1・1・13)、(1・1・14) 式をオイラーの表式に書直すと次のようになる。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - f v + g \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \quad (1 \cdot 2 \cdot 3)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + f u + g \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \quad (1 \cdot 2 \cdot 4)$$

(1・2・3) 式を y について微分し、(1・2・4) 式を x について微分し、後の式から前の式を減ずると次式をうる。

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} + u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} + (\zeta + f) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \quad (1 \cdot 2 \cdot 5)$$

ここに、 $\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$ であって、二次元の渦度である。

コリオリの因子 f は時間に無関係であるから、(1・2・5) 式に $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$ を加えて整理すると、

$$\frac{d(\zeta + f)}{dt} + (\zeta + f) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \quad (1 \cdot 2 \cdot 6)$$

これが水平運動に対する渦度方程式である。いまとくに水平発散はないものと仮定すると、

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1 \cdot 2 \cdot 7)$$

であるから、(1・2・6) 式は、

$$\frac{d(\zeta + f)}{dt} = 0 \quad (1 \cdot 2 \cdot 8)$$

となる。ここで絶対渦度 $\eta = \zeta + f$ を用い、(1・2・8) 式をオイラーの表現になおすと、

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -u \frac{\partial \eta}{\partial x} - v \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad (1 \cdot 2 \cdot 9)$$

となる。(1・1・17) 式の地衡風近似により、 u 及び v は、

$$u = -\frac{g}{f} \frac{\partial z}{\partial y} \quad (1.2.10)$$

$$v = \frac{g}{f} \frac{\partial z}{\partial x} \quad (1.2.11)$$

であるから、この u 、 v を (1.2.9) 式に代入すると

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{g}{f} \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{g}{f} \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{g}{f} J(\eta, z) \quad (1.2.12)$$

と表わされる。また (1.2.10) (1.2.11) 式によって ζ を表わすと

$$\zeta = \frac{g}{f} \nabla^2 z \quad (1.2.13)$$

であるから、

$$\eta = \frac{g}{f} \nabla^2 z + f \quad (1.2.14)$$

となる。

(1.2.12) 式は、 $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$ を考慮すれば次のように変形される。

$$\nabla^2 \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right) = J(\eta, z) \quad (1.2.15)$$

(1.2.12) 又は (1.2.15) 式は順圧大気モデルにおける渦度方程式である。このモデルにおいては、渦度が保存されるので、考える系全体の運動エネルギーが時間に関して一定となるから、気象学上、高・低気圧の急速な発達や衰弱を追跡するためのモデルとしては不十分である。しかしながら、数値解析の観点から考えると、ポアッソンの方程式の解法となり、次にのべる三次元モデルの計算式と本質的に等価である。

1.3 三次元の渦度方程式

大気擾乱の急速な発達や衰弱の原因の一つとして、系のもっているポテンシャル・エネルギーの運動エネルギーへの転換を考えなければならない。したがって、あまり変化のない大気擾乱に対しては、順圧大気のモデルで十分であるけれども、急激な発達や衰弱のおこる擾乱に対しては、系のもってい

るポテンシャル・エネルギーを考慮しなければならない。すなわち等密度面が等圧面、または等圧面高度と一致しないことと、収束、発散の効果からくる影響とを考慮し、問題を三次元的に考えなければならない。このことを考慮した大気モデルを傾圧大気モデルと呼んでおり、順圧大気にくらべて、いろいろな付加項が加わるために問題の取扱いが複雑になって来る。気象学において傾圧大気の研究目標は、複雑になってくる傾圧大気モデルを簡単化し、少しでも、順圧大気との類似性および関連性を見出す方向にむけられている。

傾圧大気と順圧大気との関連性をよく表しているのは、相当順圧大気モデルである。このモデルは風の垂直分布を仮定して順圧大気の運動方程式を積分し、発散のない相当順圧面において渦度方程式を求めるものである。

次に相当順圧大気モデル及び傾圧大気モデルにおける渦度方程式について簡単に説明し、数値計算の上からはそれぞれ楕円型偏微分方程式であるヘルムホルツ及びポアソソンの方程式を解く問題となることを示すことにする。

1・3・1 相当順圧大気モデル

順圧大気モデルは大気を非圧縮性流体と仮定するものであるから、実際の大気に対しては、あてはまらない。この欠点を除くために或特定の層の大気の運動によって大気の水平運動を表すことが試みられた。このモデルがCharney および Eliassen によって発表された相当順圧大気モデルである。この方法は簡単ではあるが、實際上、現在の数値予報の基礎となっている。地上約 1500m 以上の高さにおける任意の等圧面の等温度線は、その面の等高線と一致する傾向がある。このモデルでは、この仮定が厳密に成立するものとしている。この仮定によると水平面内の風の方向は垂直座標に無関係となる。従って風の方向は圧力 P に対して独立であると仮定して次のようにおくことができる。

$$u = A\bar{u} \quad , \quad v = A\bar{v} \quad , \quad V = A\bar{V} \quad (1 \cdot 3 \cdot 1)$$

ここで $\bar{\quad}$ は任意の変数 ϕ を 0 から或気圧 P_0 まで積分した平均値を表すものである。すなわち、

$$\bar{\phi} = \frac{1}{P_0} \int_0^{P_0} \phi dp$$

であって A は更に p のみの関数とする。この仮定に従い (1・3・1) 式は相当順圧モデルを決定するものである。このモデルの基礎方程式は運動方程式 (1・2・3) (1・2・4) および連続の式 (1・1・20) から得られる。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + V \cdot \nabla u + \omega \frac{\partial u}{\partial p} - f v + g \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \quad (1.3.2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + V \cdot \nabla v + \omega \frac{\partial v}{\partial p} + f u + g \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \quad (1.3.3)$$

$$\nabla \cdot V + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0 \quad (1.3.4)$$

ここで、 $\omega = \frac{dp}{dt}$ である。

上式に於て、微分はすべて p を一定としたものである。(1・3・2), (1・3・3), (1・3・4) 式を変形して、両辺に Curl を施すと次式をうる。(1)

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + A^2 \nabla \cdot \zeta \bar{V} + \frac{\omega_0}{p_0} (\zeta_0 - A^2 \zeta) + K \cdot \frac{\nabla \omega_0}{p_0} \times (V_0 - A^2 \bar{V}) + \nabla \cdot f \bar{V} = 0 \quad (1.3.5)$$

更に両辺に A^2 を乗じて (1・3・1) 式を用いると、次式で近似される。

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + V \cdot \nabla (\zeta + f) - \frac{A^2 \omega_0}{p_0} (\zeta + f) = 0 \quad (1.3.6)$$

z_0 , ω_0 はそれぞれ $P = P_0$ における等圧面高度及び風速の垂直成分であつて、 ω_0 は次式で与えられる。 z_g は地表面の等圧面高度を表すものである。

$$\omega_0 = g p_0 \left(\frac{\partial z_0}{\partial t} + V_0 \cdot \nabla z_0 - V_0 \cdot \nabla z_g \right) \quad (1.3.7)$$

$\zeta = \frac{g}{f} \nabla^2 z$ であるから、地衡風近似を用いると、 $\frac{\partial z_0}{\partial t} = \frac{A_0}{A^2} \frac{\partial z}{\partial t}$,

$V_0 = \frac{A_0 g}{A^2 f} K \times \nabla z$ となる。この関係と (1・3・7) 式の ω_0 を (1・3・

6) 式に代入すると、次式をうる。

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 z + \frac{g}{f} J(z, \nabla^2 z) + \beta \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{A_0 f}{RT_0} \left(\frac{g}{f} \nabla^2 z + f \right) \left[\frac{\partial z}{\partial t} - \frac{g}{f} J(z, z_g) \right] = 0 \quad (1.3.8)$$

ここに T_0 は $P = P_0$ における絶対温度である。

(1.3.8) 式は相当順圧大気モデルによる計算式である。ここで Charney によつて、 z は 500 ミリバールの等圧面高度にえらばれている。

$\eta = \frac{g}{f} \nabla^2 z + f, \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0, \beta = \frac{\partial f}{\partial y}$, であるから, (1.3.8) 式の左辺に $\frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x}$ を加えて整理すると次のようになる。

$$\nabla^2 \frac{\partial z}{\partial t} - \frac{A_0 f}{RT_0} \eta \frac{\partial z}{\partial t} = -J(z, \eta) - \frac{A_0 g}{RT_0} J(z, z_g) \quad (1.3.9)$$

(1.3.9) 式は $(\frac{\partial z}{\partial t})$ を変数と考えれば, ヘルムホルツの方程式となるから, 楕円型偏微分方程式であつて, 数値計算上はポアッソンの方程式と同様にとり扱える。

1.3.2 傾圧大気モデルの渦度方程式

相当順圧大気モデルにおいては, 絶対渦度の極大および極小値の数は時間の経過と共に変らずに保存されている。しかし実際の大気現象においては新しい極大, 極小値が発生する。この現象を Cyclogenesis と呼ぶ。Cyclogenesis は屢々大きな災害をもたらすものである。Cyclogenesis の予報のためには, より完全な形で傾圧大気モデルの方程式をとかねばならない。すなわち風は自由に, ある層から他の層へ移ることができ, 温度分布が一般的に圧力分布と異なるモデルを扱わなければならない。ここで, 気圧を垂直軸にとり, 水平面上に x, y 軸をとったものを圧力座標系という。この座標系の方程式は (1.1.16), (1.3.4), (1.1.27) 式から次式で与えられる。

$$\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)_t + u \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_p + v \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_p + w \frac{\partial V}{\partial p} + K \times fV + g \nabla p z = 0 \quad (1.3.10)$$

$$\nabla p V + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0 \quad (1.3.11)$$

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial t}\right)_p + V \nabla p \theta + \omega \frac{\partial \theta}{\partial p} = 0 \quad (1.3.12)$$

$$\frac{\partial z}{\partial p} = -\frac{\alpha}{g} \quad (1.3.13)$$

$$p\alpha = RT \quad (1.3.14)$$

$$\theta = T \left(\frac{p_0}{p} \right)^k \quad (1.3.15)$$

この方程式群は7つの独立なスカラー方程式からなり、独立変数 x, y, p および t からなる7つの従属変数 $u, v, w, z, \theta, \alpha$ および T を含んでいる。

(1.3.10) 式をベクトル公式および連続の式によって変形し、各項の Curl をとることによって、つぎの渦度方程式をうる。

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + V \cdot \nabla (\zeta + f) - (\zeta + f) \frac{\partial \omega}{\partial p} + \omega \frac{\partial \zeta}{\partial p} + K \cdot \nabla \omega \times \frac{\partial V}{\partial p} = 0 \quad (1.3.16)$$

次に地衡風近似を用いて、

$$V = K + \frac{g}{f} \nabla z, \quad \zeta = \frac{g}{f} \nabla^2 z \quad (1.3.17)$$

とおき、(1.3.16) 式に代入すると、つぎのようになる。

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 z + J(z, \zeta + f) - \frac{f(\zeta + f)}{g} \frac{\partial \omega}{\partial p} + \omega \frac{\partial}{\partial p} \nabla^2 z + \nabla \omega \cdot \nabla \frac{\partial z}{\partial p} = 0 \quad (1.3.18)$$

一方、(1.3.12) 式に(1.3.15) 式を代入して整頓すると次式をうる。

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial z}{\partial p} + \frac{g}{f} J(z, \frac{\partial z}{\partial p}) - \sigma \omega = 0 \quad (1.3.19)$$

ここに $\sigma = \frac{1}{g\rho\theta} \frac{\partial \theta}{\partial p}$ である。

θ と ρ は z の関数として表わせるから σ は z の関数である。

傾圧大気モデルの方程式は結局、二つの従属変数 z と ω に関する(1.3.18) 及び(1.3.19) 式となる。

次に、この連続方程式の解法について述べる。

1.3.3 ω 方程式

大気の運動方程式に於て、物理的な境界条件は、実質的には、 ω に関するものであるから、任意の時刻 t における ω と z の関係を求める。このために、

(1・3・18)式を p について微分し, (1・3・19)式に二次元の ∇^2 を作用させる。そして才1式から才2式を引くと次の方程式をうる。

$$\begin{aligned} \nabla^2(\sigma\omega) - \frac{f(f+\zeta)}{g} \frac{\partial^2 \omega}{\partial p^2} + \omega \nabla^2 \frac{\partial^2 z}{\partial p^2} + \nabla \omega \cdot \nabla \frac{\partial^2 z}{\partial p^2} + \nabla \frac{\partial \omega}{\partial p} \cdot \nabla \frac{\partial z}{\partial p} \\ = \frac{g}{f} \nabla^2 J(z, \frac{\partial z}{\partial p}) - \frac{\partial}{\partial p} J(z, \zeta + f) \end{aligned} \quad (1・3・20)$$

(1・3・20)式中の σ と ζ は Z の関数である。この式は z を既知数, ω を未知数とみるとき非斉次の線型偏微分方程式である。

(1・3・20)式を(1・3・18)式と共に用いると, 従属変数 ω および z に関する予報方程式が形成される。(1・3・19)および(1・3・20)式は二つの性質をもっている。その一つは音波および重力波に当る解を含まないことである。もう一つは, (1・3・18)式が流体の各部における渦度の変化と流体のトルクに影響する力との関係を与える渦度方程式であって, 気圧傾度の力は面と垂直で, トルクを生じないものとして表わされていることである。傾圧大気の基礎方程式を積分する際には, 不正確な観測データから, 殆んど相殺するような値の和を計算しなければならない。しかし(1・3・18)式を用いることによりこの困難は除かれている。

更に(1・3・18)式の才4項および才5項の値は才1項および才2項の値にくらべて小さく且相殺する。このために(1・3・18)式は屢々才4項および才5項を省略し, 且才3項の $(\zeta + f)$ を f にひとしいとして簡単化される。

$$\nabla^2 \frac{\partial z}{\partial t} + J(z, \zeta + f) - \frac{f^2}{g} \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0 \quad (1・3・21)$$

従って(1・3・20)式に相当する方程式はつぎのようになる。

$$\sigma \nabla^2 \omega - \frac{f^2}{g} \frac{\partial^2 \omega}{\partial p^2} = \frac{g}{f} \nabla^2 J(z, \frac{\partial z}{\partial p}) - \frac{\partial}{\partial p} J(z, \zeta + f) \quad (1・3・22)$$

σ は ω にくらべ殆んど変化しないので通常 σ の変化は無視される。

次に(1・3・21)および(1・3・22)式の差分近似式を考える。水平座標を地図上の直角座標 x, y とし, 垂直軸を p とする。 x, y 方向の格子間隔を d , p 方向の気圧間隔を Δp とする。このとき格子点は $(id, jd$

$K\Delta p$) で表わすものとする。

i, j を $0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n$ なる整数とし, K を $0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, \dots, Q$ なる値をとるようにえらぶと $(1 \cdot 3 \cdot 21), (1 \cdot 3 \cdot 22)$ 式は次式で近似される。

$$\nabla^2 \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right)_{k+\frac{1}{2}} + \frac{1}{4} J \left(z_{k+\frac{1}{2}}; \zeta_{k+\frac{1}{2}} + f \right) - \frac{f^2 d^2}{gm^2 \Delta p} (\omega_{k+1} - \omega_k) = 0 \quad (1 \cdot 3 \cdot 23)$$

$$\sigma_k \nabla^2 \omega_k - \frac{f^2 d^2}{gm^2 (\Delta p)^2} (\omega_{k-1} - 2\omega_k + \omega_{k+1})$$

$$= \frac{g}{8fd^2 \Delta p} \nabla^2 m^2 J(z_{k+\frac{1}{2}} + z_{k-\frac{1}{2}}, z_{k+\frac{1}{2}} - z_{k-\frac{1}{2}})$$

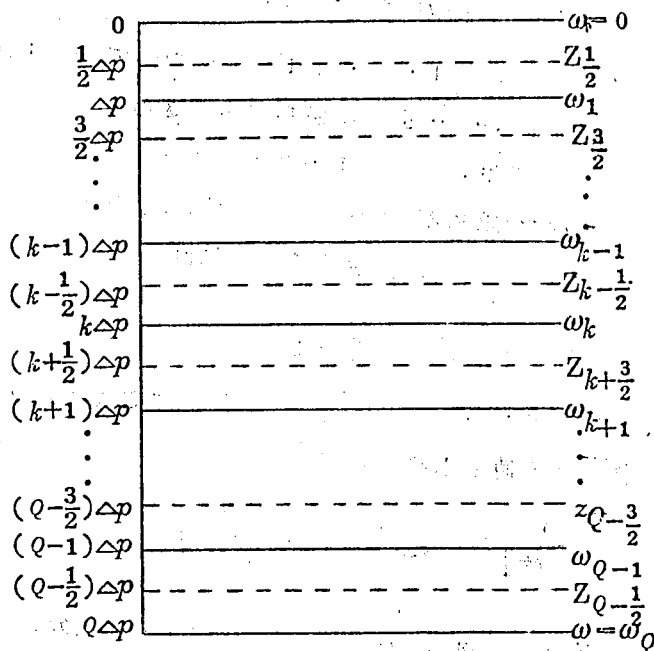
$$- 4 \frac{1}{\Delta p} J(z_{k+\frac{1}{2}}, \zeta_{k-\frac{1}{2}} + f) \quad (1 \cdot 3 \cdot 24)$$

ここに

$$\zeta = -\frac{gm^2}{fd^2} \nabla^2 z$$

である。(1・3
23), (1・3
24) 式は傾圧大気
の数値予報の計算式
である。

才1・3・1図の
ように, K の値に対
応する等圧面があり,
この面のすべての格
子点の Z の値が与え
られたとする。 K に
1 から $(Q-1)$ ま
での値を与えたとき,
(1・3・24) 式
の右辺にこの K の値



才1・3・1図 n 層傾圧大気モデルにおける
層の構成および番号

を代入すると、 $(Q+1)$ 個の未知数 $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_Q$ に対して $(Q-1)$ 個の連立方程式をうる。従って ω の値を決定するためには、式の数に2個不足する。しかしながら、上下端の ω の値、 ω_0 と ω_Q が与えられれば、この連立方程式は解くことができる。一般に ω_0 は大気の上端における気圧変化を表すものであるから $\omega_0 = 0$ と仮定する。他方地表面では、空気は地表面を透過しないと仮定して差支えないから、風速の垂直成分は0と考えられる。そして $\omega_0 = 0$ 或は

$$\omega_0 = \nu_a \cdot \nabla P_s$$

なる近似を用いる。⁽¹⁾⁽⁴⁾ ここで P_s は地表面における標準気圧である。後の方の近似を差分で表すと、

$$\omega_0 = \frac{g m^2}{4 f d^2} J(z_{Q-\frac{1}{2}}, P_s) \quad (1 \cdot 3 \cdot 25)$$

となる。従って、 $(1 \cdot 3 \cdot 24)$ 式について $Q+1$ 個の方程式が得られるので、 $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_Q$ の値が決定できる。

計算に当っては、まづ $(1 \cdot 3 \cdot 24)$ 式の右辺を初期値を用いて計算し、左辺の ω の値を求める。ついで、この ω の値を $(1 \cdot 3 \cdot 22)$ 式に代入すると、 $(\partial z / \partial t)_{k+\frac{1}{2}}$ を求めるためには

$$\nabla^2 \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right)_{k+\frac{1}{2}} = F_{k+\frac{1}{2}} \quad (1 \cdot 3 \cdot 26)$$

なるポアソン方程式を解けばよい。ここで F は i, j, k の関数である。 Δt 後の z の値を求めるには

$$z_{k+\frac{1}{2}}^1 = z_{k+\frac{1}{2}}^0 + \Delta t \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right)_{k+\frac{1}{2}}^0$$

によって $z_{k+\frac{1}{2}}^1$ を求める。 $z_{k+\frac{1}{2}}^2$ 以降は中央差分によって逐次積分を行い、計算を繰返して $n \Delta t$ 後の z を求める。

1・4 渦度方程式の計算方法

渦度方程式は順圧大気モデル、相当順圧大気モデル、および傾圧大気モデル

ルにおいてそれぞれ異なった形で与えられている。しかし、これらの式の数値計算法はポアッソン或はヘルムホルツの楕円型偏微分方程式の解法と、時間に関しての逐次積分法の二つに大別される。三次元モデルである傾圧大気モデルは気象学上の内容は異なるが、その計算法は二次元モデルの解法に還元されている。従って、本論文においては数値解析の立場から、基礎的なモデルである順圧大気モデルにおける渦度方程式を取扱うことにする。

1・4・1 地球の曲率に対する補正⁽²⁾

順圧大気モデルの方程式は(1・2・12)，(1・2・14)式によって与えられる。この式は地球を平面として取扱って得たものであるが、実際の数値計算は球面を平面に射影した天気図によっておこなうので、その補正をしなければならない。等角写像による天気図を用いる場合には、地球上の真の長さ Δx と射影面上での長さ Δa の間につきのような関係式が成立する。

$$\Delta a = m \cdot \Delta x \quad \text{或は} \quad \frac{1}{\Delta x} = m \frac{1}{\Delta a}$$

ここで m は拡大係数 (Magnification factor) とよばれるもので、一般に緯度の関数である。たとえば 60°N を標準緯度とするステレオ投影図においては

$$m = \frac{1 + \sin 60^\circ}{1 + \sin \phi} \quad (\phi: \text{緯度})$$

である。したがって球面上での ∇ -オペレーターを ∇_s と書けば、 ∇_s と天気図上での ∇ -オペレーターとの関係は次のようになる。

$$\nabla_s = m \nabla \quad (1 \cdot 4 \cdot 1)$$

同様に球面上での $\zeta = \frac{g}{f} \nabla_s^2 z$ と天気図上での $\zeta = \frac{g}{f} \nabla^2 z$ との関係はつぎのようになる。

$$\frac{g}{f} \nabla_s^2 z = \frac{g}{f} m^2 \nabla^2 z = m^2 \left(\frac{g}{f} \nabla^2 z \right) \quad (1 \cdot 4 \cdot 2)$$

直角座標を用いて書いた絶体渦度の式(1・2・9)および(1・2・10)式に対応する方程式は一般につきのようにつける。

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -V \cdot \nabla_s \eta \quad (1 \cdot 4 \cdot 3)$$

$$\text{ただし } \eta = \frac{g}{f} \nabla_s^2 z + f, \quad V = \frac{g}{f} K \times \nabla_s z$$

この (1・4・3) 式に (1・4・1) および (1・4・2) 式の関係を用いると天気図上の座標に対応するつぎの二つの式が得られる。

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{gm^2}{f} \frac{\partial(\eta, z)}{\partial(x, y)} \equiv \frac{gm^2}{f} J(\eta, z) \quad (1 \cdot 4 \cdot 5)$$

$$\eta = \frac{gm^2}{f} \nabla^2 z + f \quad (1 \cdot 4 \cdot 6)$$

以後 (1・4・5) および (1・4・6) 式について考えることにする。

1・4・2 計算方式

数値予報の基本になる方程式は (1・4・5) および (1・4・6) 式の二式であるが、この式は次の 2 組の式で表わされて、二通りの計算体系を与える。

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right) = J(\eta, z) \end{array} \right. \quad (1 \cdot 4 \cdot 7)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta = \frac{gm^2}{f} \nabla^2 z + f \end{array} \right. \quad (1 \cdot 4 \cdot 8)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 z = \left(\frac{gm^2}{f} \right)^{-1} (\eta - f) \end{array} \right. \quad (1 \cdot 4 \cdot 9)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{gm^2}{f} J(\eta, z) \end{array} \right. \quad (1 \cdot 4 \cdot 10)$$

(1・4・7), (1・4・8) 式は z の外挿から始める計算方法, (1・4・9), (1・4・10) 式は η の外挿から始める計算方法を与える。

a z の外挿から始める方法

この方法はつぎの計算段階に分かれる。

(1) 与えられた z の初期値から (1・4・8) 式によって, η の初期値

を決定する。

(2) η と z の初期値から (1・4・7) 式の右辺の値を計算して

$$\nabla^2\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right) = J(\eta, z) \equiv \pi \quad (1 \cdot 4 \cdot 11)$$

なる形のポアッソン方程式をとりて $\frac{\partial z}{\partial t}$ を求める。

(3) $(z)_{t=t_0+\Delta t} = (z)_{t=t_0} + \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_{t=t_0} \cdot \Delta t$ の近似式で $t=t_0+\Delta t$ における z を求める。

(4) つぎに $t = t_0 + \Delta t$ における z を初期値として、

$$\zeta = \frac{g}{f} \nabla^2 z, \quad \eta = \zeta + f$$

の関係式で $t = t_0 + \Delta t$ における $\frac{\partial(\eta \cdot z)}{\partial(x \cdot y)} \equiv \pi$ を求める。

(5)(2) に帰って、(3) の操作を

$$(z)_{t=t_0+n\Delta t} = (z)_{t=t_0+(n-2)\Delta t} + \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right) \cdot 2\Delta t$$

によって、中央差分で計算することによって $(z)_{t=t_0+2\Delta t}$ を求める。

この繰返計算を総計 N 回行うことによって、 $N\Delta t$ 後の z の値を求めることが出来る。

(b) η の外挿から始める方法

(1) (1・4・10) 式の右辺の値 $(\partial\eta/\partial t)_{t=t_0}$ を、 $t=t_0$ における初期値 z および η の値を用いて求める。

(2) $(\eta)_{t=t_0+\Delta t} = (\eta)_{t_0} + \left(\frac{\partial\eta}{\partial t}\right)_{t=t_0} \cdot \Delta t$ の近似式で $t=t_0+\Delta t$ における η の値を求める。

(3) (1・4・9) 式の右辺の η の値として、 $(\eta)_{t=t_0+\Delta t}$ の値を代入したポアッソンの方程式を解いて、 $t=t_0+\Delta t$ における z の値を求める。

(4) つぎに $t=t_0+\Delta t$ における z の値を初期値として、 $t=t_0+\Delta t$ における $\frac{\partial\eta}{\partial t}$ の値を (1・4・10) 式から求める。

(5) $t=t_0+\Delta t$ のときの値を初期値として、(2)の操作に帰る。このとき

$$(\eta)_{t=t_0+n\Delta t} = (\eta)_{t=t_0+(n-2)\Delta t} + \left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)_{t=t_0+(n-1)\Delta t}$$

$\times 2\Delta t, n \geq 2$ として、 Δt 後の η の値を求める。そして(3)の操作によって $t=t_0+\Delta t \cdot n$ における z の値を求める。

渦度方程式の数値解法において、最も問題となるのは楕円型偏微分方程式の解法である。次章ではこの問題について考察する。

第2章 ブロック反復法による楕円型偏数微分

方程式の解法

第1章にのべたように二次元の渦度方程式はポアッソンの方程式とヤコビアン方程式とからなる。デジタル計算機を用いて、渦度方程式をとく場合に計算時間の大部分はポアッソンの方程式をとくためについやされ、渦度方程式の計算時間を大きく左右することになる。本章では楕円型偏微分方程式を差分方程式に直して、反復法で解く方法を述べ、更に格子点の順番のつけ方を変更したとき、反復法の収束度におよぼす影響について考察する。

2・1 ポアッソンの方程式の差分近似式

一般に次の自己随伴楕円型偏微分方程式について考える。

$$\begin{aligned} & -(P(x, y)u_x)_x - (P(x, y)u_y)_y + \sigma(x, y)u(x, y) \\ & = \xi(x, y), \quad (x, y) \in R \end{aligned} \quad (2 \cdot 1 \cdot 1)$$

境界条件を

$$\alpha(x, y)u + \beta(x, y)\frac{\partial u}{\partial n} = r(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma \quad (2 \cdot 1 \cdot 2)$$

とする。 R は領域を示し、 $\partial u / \partial n$ は境界 Γ 上の外向法線方向の偏微分である。

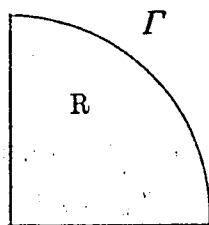
簡単のために、(2・1・1)式の P 、 σ および ξ は既知の関数で領域の内部で連続とし、かつ次の関係をみたすものとする。

$$\begin{aligned} & P(x, y) > 0 \\ & \sigma(x, y) > 0 \end{aligned}, \quad (x, y) \in \bar{R} \quad (2 \cdot 1 \cdot 3)$$

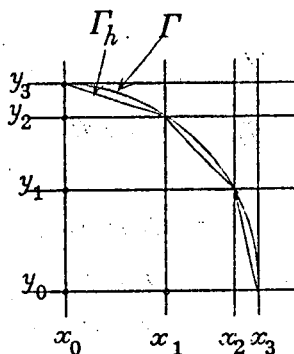
ここで、 \bar{R} は領域 R の外縁を示す。領域 R の境界 Γ 上で定義される既知の関数 α 、 β および r は区間連続であり、

$$\alpha(x, y) \geq 0, \beta(x, y) \geq 0, \alpha + \beta > 0, (x, y) \in \Gamma \quad (2 \cdot 1 \cdot 4)$$

を満足するものとする。



(a)



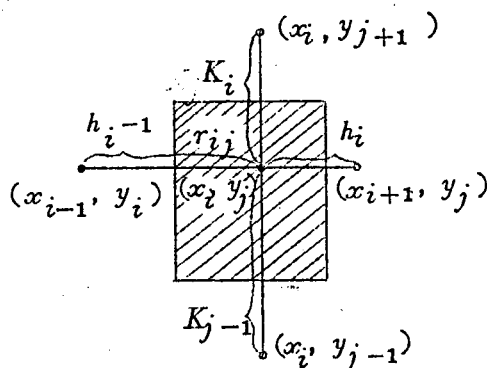
(b)

オ 2・1・1 図

一般的な境界の例としてオ 2・1・1 図の $1/4$ 円を考えよう。
 この領域 R を (b) 図のように x, y 軸に平行な直線によって格子状に分ける。
 そして格子間隔を $h_i = x_{i+1} - x_i$, $k_j = y_{j+1} - y_j$ とする。格子と境界 Γ との交点を結ぶ多角形 Γ_h により領域を近似し、 Γ_h 内の領域を R_h とする。
 そして境界 Γ_h 上の α, β および r の値は既知とする。今 $r_{i,j}$ を、オ 2・1・2 図に示すように、 $x = x_i - \frac{h_{i-1}}{2}$, $x = x_i + \frac{h_i}{2}$, $y = y_j - \frac{k_{j-1}}{2}$ および $y = y_j + \frac{k_j}{2}$ なる直線で限られた R_h 内の単位長方形領域とする。格子点 (x_i, y_j) における $u(x_i, y_j) \equiv u_{i,j}$ を未知数として、(2・1・1) 式を $r_{i,j}$ に対して積分すると、

$$-\iint_{r_{i,j}} \{ (P u_x) x + (P u_y) y \} dx dy + \iint_{r_{i,j}} \sigma u dx dy = \iint_{r_{i,j}} \xi(x, y) dx dy \quad (2 \cdot 1 \cdot 5)$$

となる。



オ 2・1・2 図

$C_{i,j}$ を $r_{i,j}$ の周辺とすれば、(2・1・5) 式はグリーンの定理によって

つぎのように書ける。

$$-\int_{c_{i,j}} \{ P u_x dy - P u_y dx \} + \iint_{r_{i,j}} \sigma u dx dy = \iint_{r_{i,j}} \xi dx dy \quad (2 \cdot 1 \cdot 6)$$

もし、 $g(x_i, y_i) \equiv g_{i,j}$ ならば上式の二重積分は

$$\iint_{r_{i,j}} g dx dy \equiv g_{i,j} a_{i,j} \quad (2 \cdot 1 \cdot 7)$$

と近似出来る。ここで $a_{i,j}$ は $r_{i,j}$ の面積である。才 2・1・2 図のように h_i, k_j をとった場合

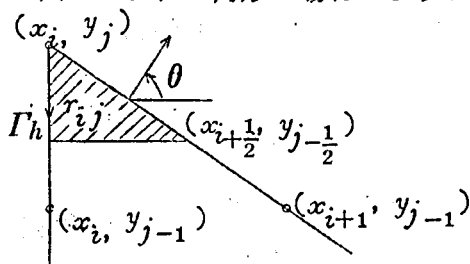
$$a_{i,j} = \frac{(h_{i-1} + h_i)(k_i + k_{j-1})}{4}$$

である。格子間隔を (2・1・2) 図のようにとった場合 (2・1・6) 式の左辺才 1 項は次のように中央差分で近似出来る。

$$\begin{aligned} & -\int \{ P u_x dy - P u_y dx \} \\ & \equiv \frac{(k_{j-1} + k_j)}{2} \left\{ P_{i+\frac{1}{2},j} \frac{(u_{i,j} - u_{i+1,j})}{h_i} + P_{i-\frac{1}{2},j} \frac{(u_{i,j} - u_{i-1,j})}{h_{i-1}} \right\} \\ & + \frac{(h_{i-1} + h_i)}{2} \left\{ P_{i,j+\frac{1}{2}} \frac{(u_{i,j} - u_{i,j+1})}{k_j} + P_{i,j-\frac{1}{2}} \frac{(u_{i,j} - u_{i,j-1})}{k_{j-1}} \right\} \end{aligned} \quad (2 \cdot 1 \cdot 8)$$

こゝに $P_{i+\frac{1}{2},j} \equiv P(x_{i+\frac{1}{2}}, y_j)$ 等である。

$r_{i,j}$ としては才 2・1・3 図のように三角形の場合がありうる。そして



才 2・1・3 図

上に格子点があり、 $\beta_{i,j} > 0$ なるときは、 $u_{i,j}$ は未知数となる。このとき (2・1・6) 式の線積分路が Γ_h と一致しない部分に対しては、(2・1・8) 式の近似が成立するが、 Γ_h と一致するときには使えない。今 Γ_h に対する

法線が x 軸となす角を θ とし、点 $(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{i-\frac{1}{2}})$ から計った斜辺の長さを t とする。このとき今考えている曲線 Γ_h の部分は θ を用いてつぎのようにかける。

$$x = x_{i+\frac{1}{2}} - t \sin \theta, \quad y = y_{i-\frac{1}{2}} + t \cos \theta \quad (2 \cdot 1 \cdot 9)$$

従つて Γ_h 上において

$$\frac{\partial u}{\partial n} = u_x \cos \theta + u_y \sin \theta \quad (2 \cdot 1 \cdot 10)$$

となる。そして、この部分に関する $(2 \cdot 1 \cdot 6)$ 式の線積分はつぎのように近似できる。

$$\begin{aligned} - \int_0^1 (P u_x dy - P u_y dx) &= - \int_0^1 (P u_x \cos \theta + P u_y \sin \theta) dt \\ &= - \int_0^1 \left(P \frac{\partial u}{\partial n} \right) dt = - \int_0^1 P \left(\frac{r(t) - \alpha(t) u(t)}{\beta(t)} \right) dt \quad (2 \cdot 1 \cdot 11) \\ &\approx - P_{i,j} \left(\frac{r_{i,j} - \alpha_{i,j} u_{i,j}}{\beta_{i,j}} \right) \ell, \quad \ell = \frac{1}{2} \sqrt{h_i^2 + k_j^2} \end{aligned}$$

結局 $(2 \cdot 1 \cdot 1)$ 式の積分と境界条件 $(2 \cdot 1 \cdot 2)$ 式を使って差分近似を行つと、各格子点の $u_{i,j}$ を未知数として、つぎの差分方程式をうる。⁽¹⁰⁾

$$\begin{aligned} D_{i,j} u_{i,j} - L_{i,j} u_{i-1,j} - R_{i,j} u_{i+1,j} - T_{i,j} u_{i,j+1} - B_{i,j} u_{i,j-1} \\ = S_{i,j} + \left(\frac{h_{i-1} + h_i}{2} \right) \left(\frac{k_{j-1} + k_j}{2} \right) \tau_{i,j} \quad (2 \cdot 1 \cdot 12) \end{aligned}$$

ここに R_h 内の点 (x_i, y_j) に対して、 $D_{i,j}, L_{i,j}$ 等は $(2 \cdot 1 \cdot 7)$, $(2 \cdot 1 \cdot 8)$ 式から得られる。

$$\begin{aligned} L_{i,j} &= P_{i-\frac{1}{2},j} \left(\frac{k_{j-1} + k_j}{2 h_{i-1}} \right), \quad R_{i,j} = P_{i+\frac{1}{2},j} \left(\frac{k_{j-1} + k_i}{2 h_i} \right) \\ T_{i,j} &= P_{i,j+\frac{1}{2}} \left(\frac{h_{i-1} + h_i}{2 k_j} \right), \quad B_{i,j} = P_{i,j-\frac{1}{2}} \left(\frac{h_{i-1} + h_i}{2 k_{j-1}} \right) \\ D_{i,j} &= L_{i,j} + R_{i,j} + T_{i,j} + B_{i,j} + \sigma_{i,j} \left(\frac{h_{i-1} + h_i}{2} \right) \left(\frac{k_{j+1} + k_j}{2} \right) \\ S_{i,j} &= \xi_{i,j} \left(\frac{h_{i-1} + h_i}{2} \right) \left(\frac{k_{j-1} + k_j}{2} \right) \quad (2 \cdot 1 \cdot 13) \end{aligned}$$

(2・1・12)式の右辺第2項の $a_{i,j}$, $\tau_{i,j}$ は誤差項である。各格子点は相隣る4点と関係しているので、この近似方程式を5点近似という。

渦度方程式に表れるポアッソンの方程式は

$$-u_{xx} - u_{yy} = -\frac{gm^2}{f}(\eta - f) \quad (2・1・14)$$

であるから(2・1・1)式に於て、 $P=1$, $\sigma=0$, $\xi = -\frac{gm^2}{f}(\eta - f)$

の場合である。更に領域 R を長方形とし、等格子間隔 $h=k$ とすれば(2・1・12)式に対応する式はつぎのようになる。

$$4u_{i,j} - u_{i-1,j} - u_{i+1,j} - u_{i,j-1} - u_{i,j+1} = -h^2 \frac{gm^2}{f}(\eta - f)_{i,j} \quad (2・1・15)$$

(2・1・12), (2・1・15)式は領域内の各格子点において成立つから、格子点の数からなる連立一次方程式をうる。連立一次方程式は、一般に次の行列方程式で表すことができる。

$$AU = K + \tilde{\tau}(u) \quad (2・1・16)$$

(2・1・16)式における A はその成立ちから分るように、実対称行列である。更に(2・1・3)式によつて、 $P>0$, $\sigma>0$ であるから、対角要素は非対角要素の和の絶対値より大で且非対角要素はすべて負である。よつて A は正值行列である。従つて、楕円型偏微分方程式を差分方程式に直して反復法で解く問題は、(2・1・16)の行列方程式を解く問題となる。

2・2 行列のノルムおよびスペクトル半径

行列方程式の反復計算法の収束及び収束率を論ずる際には行列のノルムおよびスペクトル半径が有効な手段となる。本節では文献(10)に従つてこれらの定義を行う。

今 $V_n(C)$ を n 個の複素数の組が「点」を表しているような空間、すなわちユニタリー空間であるとする。

定義2・2・1

n 次元ベクトル空間 $V^n(C)$ におけるベクトル X のノルムを次式で定義する。

$$\|X\| \equiv (X^*X)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2 \cdot 2 \cdot 1)$$

定義 2・2・2

$A = (a_{i,j}), (1 \leq i, j \leq n)$ を固有値 λ_i をもつ $n \times n$ 複素行列とするとき、行列 A のスペクトル半径は

$$\rho(A) \equiv \max_{1 \leq i \leq n} \|\lambda_i\| \quad (2 \cdot 2 \cdot 2)$$

である。

定義 2・2・3

$A = (a_{i,j})$ が $n \times n$ 複素行列であるとき、行列 A のスペクトル・ノルムは

$$\|A\| = \sup_{X \neq 0} \frac{\|AX\|}{\|X\|} \quad (2 \cdot 2 \cdot 3)$$

である。

行列 A の転置行列を A^T 、転置共轭行列を A^* とすると、行列のスペクトル・ノルムとスペクトル半径との間には次の関係が成立する。

定理 2・2・1

$A = (a_{i,j})$ が $n \times n$ 複素行列なるとき

$$\|A\| = [\rho(A^*A)]^{\frac{1}{2}} \quad (2 \cdot 2 \cdot 4)$$

である。

更に次の系が成立する。

系 2・2・1

もし A がエルミート行列であったならば、

$$\|A\| = \rho(A) \quad (2 \cdot 2 \cdot 5)$$

更に $g_m(x)$ が x に関して m 次の実多項式ならば

$$\|g_m(A)\| = \rho(g_m(A)) \quad (2 \cdot 2 \cdot 6)$$

が成立する。

更に行列 A の収束に関して、次のように定義する。

定義 2・2・2

A が $n \times n$ 複素行列なるとき、 A, A^2, A^3, \dots が零行列 O に収束するとき A は収束するといひ、他の場合を発散するといふ。

行列の収束に関して次の定理がある。(10)

定理 2・2・2

A が $n \times n$ 複素行列なるとき、 A が収束するのは

$$\rho(A) < 1$$

なるときのみである。

2・3 グラフ理論による行列の性質の判定

行列 A の Reducibility および巡回性を判定するためには、グラフ理論を用いると容易である。まづ Reducibility および巡回性をつぎのように定める。

定義 2・3・1

$n \geq 2$ なる $n \times n$ 複素行列 A は置換行列 P によって次の形になるとき Reducible である。

$$P A P^T = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ O & A_{2,2} \end{pmatrix} \quad (2 \cdot 3 \cdot 1)$$

ここで $A_{1,1}$ は $r \times r$ 小行列、 $A_{2,2}$ は $(n-r) \times (n-r)$ 小行列である ($1 \leq r \leq n$)。このような置換行列 P が存在しないとき A は Irreducible である。

(2・3・1) 式の行列による行列方程式

$$\tilde{A} X = K, \quad \tilde{A} = P A P^T$$

は次のようにかける。

$$\begin{aligned} A_{1,1} X_1 + A_{1,2} X_2 &= K_1 \\ A_{2,2} X_2 &= K_2 \end{aligned} \quad (2 \cdot 3 \cdot 2)$$

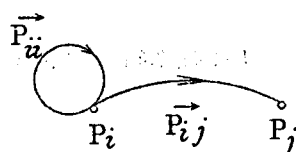
すなわち、もとの方程式は次元の低い行列方程式を解く問題に還元される。

定義 2・3・2

$n \times n$ 複素行列 A が置換行列 P によって (2・3・3) 式の変換されるとき、 A は指数 k の弱巡回行列である。ここに $k > 0$ 、対角要素は正方零行列である。

$$PAP^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & A_{1k} \\ A_{21} & 0 & & & 0 \\ 0 & A_{32} & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & A_{kk-1} & 0 \end{bmatrix} \quad (2 \cdot 3 \cdot 3)$$

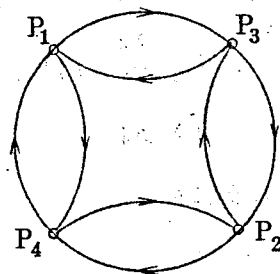
グラフ理論によって $A = (a_{i,j})$ なる $n \times n$ 複素行列を考える。まづ n 個の節 P_1, P_2, \dots, P_n を平面上に並べる。行列 A の要素 $a_{i,j}$ が 0 でないならば P_i から P_j へ 2・3・1 図のように矢印をつけた線分で結ぶ。対角要素 $a_{i,i}$ が 0 でないときには P_i においてループを作る。



2・3・1 図

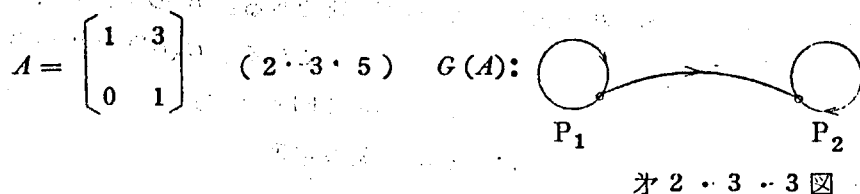
このように定めると、行列 A について、固有のグラフ $G(A)$ を得ることが出来る。例えば (2・3・4) 式の行列 B のグラフ $G(B)$ は 2・3・2 図のようになる。

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2 \cdot 3 \cdot 4)$$



2・3・2 図

(2・3・5) 式の行列 A のグラフ $G(A)$ は $\text{オ } 2 \cdot 3 \cdot 3$ 図である。



オ 2・3・2 図では任意の P_i, P_j 間に $\overrightarrow{P_{ij}}, \overrightarrow{P_{ji}}$ なる組になったグラフがあり、 $\overrightarrow{P_{ij}}$ か或は $\overrightarrow{P_{ji}}$ のみのものはない。このようなグラフを結合が強いという。

定義 2・3・3

任意の P_i, P_j の組に対して P_i から P_j に至る弧

$$\overrightarrow{P_i, l_1, P_{l_1}, l_2, \dots, P_{l_{r-1}}, l_r = j}$$

が存在するとき、グラフは結合が強いという。そして r をグラフの長さという。

この定義に従えば、オ 2・3・2 図のグラフ $G(B)$ は結合が強く、第 2・3・3 図のグラフ $G(A)$ は結合が強いではない。

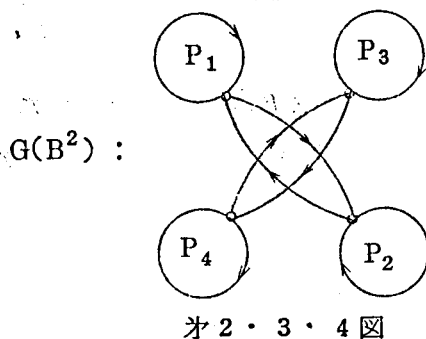
定理 2・3・1⁽¹¹⁾

$n \times n$ 複素行列 A はグラフ $G(A)$ の結合が強い場合に限り Irreducible である。

この定理によってグラフの結合の強さを吟味すれば、Reducibility が分かる。つぎにグラフによって巡回行列かどうか判定出来る。

$n \times n$ の非負行列 A の r 乗べきのグラフは行列 A のグラフから容易に導かれる。すなわち A のグラフにおいて長さ r の節の間を長さ 1 の弧で結べばグラフ $G(A^r)$ が得られる。グラフ $G(A^r)$ において A が巡回行列でないときは各節 P_i が長さ 1 の弧によって、他のすべての節 P_j に結ばれている。他方、 A が Irreducible であって、指数 k の巡回行列 ($k > 1$) であるとすれば、 $G(A^{rk})$, $r \geq 1$ のグラフは k 個の結合の強いグラフの集合である。

例えば $(2 \cdot 3 \cdot 4)$ 式の B は指数 2 の巡回行列である。 B^2 のグラフ $G(B^2)$ を $2 \cdot 3 \cdot 2$ 図から作ると $2 \cdot 3 \cdot 4$ 図のようになる。 $G(G^2)$ は 2 つの結合の強いグラフの集合である。一般に Irreducible な非負行列 A が巡回行列であるかないかをグラフから決定するには次の定理に従う。



定理 $2 \cdot 3 \cdot 2$

$A = (a_{ij}) \geq 0$ を Irreducible な $n \times n$ 行列とし、 $G(A)$ をそのグラフとする。 $G(A)$ の各節 P_i から P_j に至るすべての閉じた弧に注目する。これらの閉じた弧の長さ m_i の集合を S_i とし、 k_i を長さ $\{m_i\}$ の最大公約数とする。すなわち

$$k_i = g.c.d. \{m_i\}_{m_i \in S_i}, \quad 1 \leq i \leq n. \quad (2 \cdot 3 \cdot 6)$$

とする。ここで、

$k_1 = k_2 = \dots = k_n = k$ であって、 $k > 1$ になるとき、 A は指数 k の巡回行列である。 $k = 1$ になるときは A は巡回行列ではない。定理 $2 \cdot 3 \cdot 2$ によって巡回および非巡回グラフを次のように定義する。

定義 $2 \cdot 3 \cdot 4$

G を或強い結合のグラフとすると、そのグラフのすべての節における閉じた弧の長さの最大公約数 k が 1 より大ならば巡回グラフであり、1 にひとしければ非巡回グラフである。

つぎに巡回行列の配列について考える。 A を $n \times n$ 行列とし ($n \geq 2$)、 $(2 \cdot 3 \cdot 7)$ 式のように大行列の形で表す。

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} \quad (2 \cdot 3 \cdot 7)$$

ここに A_i, i は正方行列であって、 $1 \leq i \leq n$ である。 A のブロック・ヤコビ行列 B を $B = L + U$ で表わすとき、 A の調和配列 (Consistently orderd) をつぎのように定義する。ここに L は B の下側三角行列、 U は上側三角行列である。

定義 2 · 3 · 5

A は指数 k の巡回行列とする。行列

$$B(\alpha) \equiv \alpha L + \alpha^{-(p-1)} U$$

のすべての固有値が、 α ($\alpha \neq 0$) に対して独立なるとき行列 A は調和配列にあるという。又 B も調和配列であるという。上の行列の固有値が α に対して独立でないときは非調和配列である。

グラフ理論によって行列 B の調和配列を決定するには 2 種のグラフ $\hat{G}(B)$ を用いる。2 種のグラフとは、図 2 · 3 · 5 図に示すように、前にのべたグラフにおいて $\vec{P_{ij}}$ の $i < j$ なる弧には二重の矢印をつけたものである。

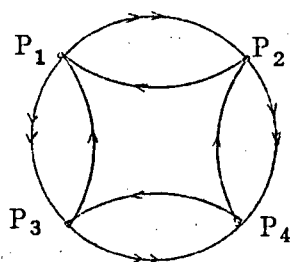


図 2 · 3 · 5

この二重の矢印をもつ弧を大弧、一重のものを小弧と名付ける。このとき、グラフ $\hat{G}(B)$ の各節における閉じた弧のすべてが同数の大弧および小弧から成立っているとき行列 B は調和配列である。

2・4 行列方程式の基本的反復法

行列 $A = (a_{i,j})$ を $n \times n$ 複素行列とすると、つぎの連立方程式

$$\sum_{j=1}^n a_{i,j} X_j = k_i, \quad 1 \leq i \leq n$$

は (2・4・1) 式のように書表わされる。

$$AX = K \quad (2 \cdot 4 \cdot 1)$$

ここに A は正則で、その対角要素 $a_{i,i}$ はすべて零でないと仮定する。ベクトル X は $X = A^{-1}K$ として求めることができるが、 A の次数が高くなるとこの方法は実際上困難になるので反復法を考える。行列 A は

$$A = D - E - F \quad (2 \cdot 4 \cdot 2)$$

と表わすことができる。ここに D は対角行列、 E および F はそれぞれ $A - D$ の下及び上の三角行列をとって各要素に負号をつけた行列である。(2・4・2) 式によって、(2・4・1) 式をつぎのように変形する。

$$DX = (E + F)X + K \quad (2 \cdot 4 \cdot 3)$$

(2・4・3) 式から次の反復法を得る。

$$DX^{(m+1)} = (E + F)X^{(m)} + K, \quad m \geq 0 \quad (2 \cdot 4 \cdot 4)$$

$$X^{(m+1)} = D^{-1}(E + F)X^{(m)} + D^{-1}K, \quad m \geq 0 \quad (2 \cdot 4 \cdot 5)$$

この反復法をヤコビの方法或は Richardson の方法という。

$$B \equiv D^{-1}(E + F) \quad (2 \cdot 4 \cdot 6)$$

なる行列 B を行列 A のヤコビの行列とよぶ。電子計算機を用いる場合この方法では $X^{(m+1)}$ を計算する間 $X^{(m)}$ の値をすべて記憶しておく必要がある。これに反して、既に求められた $X^{(m+1)}$ の要素の値をすぐ他の $X^{(m+1)}$ の要素を求める計算に使うようにすれば、記憶容量は半分ですみ、収束が早くなることが予想される。これが次にのべるガウス・ザイデル法 (Gauss-Seidel 法) である。

$$a_{i,j} x_i^{(m+1)} = - \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j} x_j^{(m+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{i,j} x_j^{(m)} + k_i, \quad 1 \leq i \leq n,$$

$$m \geq 0$$

$$(2.4.7)$$

この式を行列の形でかくと

$$(D - E)X^{(m+1)} = FX^{(m)} + K, \quad m \geq 0 \quad (2.4.7')$$

となる。(D - E)は正則な下側三角行列であるから、

$$X^{(m+1)} = (D - E)^{-1}FX^{(m)} + (D - E)^{-1}K, \quad m \geq 0 \quad (2.4.8)$$

となる。

$$C \equiv (D - E)^{-1}F \quad (2.4.9)$$

なる行列Cを行列Aのガウス・ザイデル行列という。この方法は又Liebmanの方法とよばれる。

次に

$$DX^{(m+1)} = EX^{(m+1)} + FX^{(m)} + K \quad (2.4.10)$$

とすると

$$DX^{(m+1)} = DX^{(m)} + \omega(DX^{(m+1)} - DX^{(m)}) \quad (2.4.11)$$

によって $X^{(m+1)}$ を求めるものを、加速反復法 (Successive relaxation method) という。 $\omega < 1$ なるものをunder-relaxation、 $\omega > 1$ なるものをOver-relaxationという。

$\omega = 1$ のときはガウス・ザイデル法になる。

(2.4.11)を変形すると

$$(D - \omega E)X^{(m+1)} = \{(1 - \omega)D + \omega F\}X^{(m)} + \omega K \quad (2.4.12)$$

となる。 $D - \omega E$ は正則だから、逆行列が存在する。

$$L \equiv D^{-1}E, \quad U \equiv D^{-1}F$$

とおくと、

$$X^{(m+1)} = (I - \omega L)^{-1} \{(1 - \omega)I + \omega U\}X^{(m)} + \omega(I - \omega L)^{-1}D^{-1}K \quad (2.4.13)$$

をうる。(2.4.13)式は ω の値が1より小さいか、大きいかに従い、それぞれPoint successive under relaxation 法およびPoint su-

ccessive over relaxationを与える。この方法は又加速リーブマン法, Extrapolated Gauss-Seidel 法或いは Systematic overrelaxation 法とよばれるものである。Point successive over relaxation 行列はつぎの行列である。

$$L\omega = (I - \omega L)^{-1} \{ (1-\omega)I + \omega U \} \quad (2 \cdot 4 \cdot 14)$$

ここに, $2 > \omega > 1$ である。

行列方程式の反復行列 B , C , $L\omega$ 等を一般に M とするとき, M のスペクトル半径 $\rho(M)$ が 1 より小なるときに, これらの反復法は収束する。

次にブロック反復法を考えよう。そして $(2 \cdot 4 \cdot 1)$ の行列 A は $(2 \cdot 4 \cdot 15)$ 式のように, 小行列 $A_{i,j}$ からなる大行列と考える。ここに $A_{i,i}$ $1 \leq i \leq N$, は正方行列であって, $r_i \geq 1$ になるとき $r_i \times r_i$ である。このとき $(2 \cdot 4 \cdot 5)$, $(2 \cdot 4 \cdot 8)$ および $(2 \cdot 4 \cdot 13)$ 式はそれぞれの方法のブロック反復法を与える。

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,n} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \cdots & A_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n,1} & A_{n,2} & \cdots & A_{n,n} \end{bmatrix}, \quad 1 \leq i \leq n \quad (2 \cdot 4 \cdot 15)$$

長方形領域に対する Overrelaxation method の最適加速係数 ω_b は Young によって与えられており,

$$\omega_b = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho^2(B)}} \quad (2 \cdot 4 \cdot 16)$$

である。 $\rho(B)$ はヤコビ行列 B のスペクトル半径である。実際の計算に当っては, 長方形領域以外の場合, 一般に $\rho(B)$ の値は未知であるから, ω_b を Kulsrud⁽¹³⁾ の方法等によって決定しなければならない。(付録 3 参照)

2・5 平均収束率

ここで, 平均収束率を Young⁽¹²⁾ に従って定義する。

定義 2・5・1

A および B を $n \times n$ 複素行列とする。今或正の数 m に対して $\|A^m\| < 1$ ならば、行列 A の m 回の反復計算による平均収束率は

$$R(A^m) \equiv -\ell_n(\|A^m\|^{\frac{1}{m}}) = \frac{-\ell_n \|A^m\|}{m} \quad (2 \cdot 5 \cdot 1)$$

である。 $R(A^m) < R(B^m)$ ならば m 回の反復計算において、 B は A よりも収束が早い。

一般に、 M を、 $n \times n$ 複素行列とし、 $I - M$ が正則なるとき

$$X^{(m+1)} = M X^{(m)} + g \quad (2 \cdot 5 \cdot 2)$$

なる式による、反復計算は、 $(I - M)X = g$ なる式の解を与える。 m 回の反復計算における誤差ベクトルを $\varepsilon^{(m)}$ とすると

$$\varepsilon^{(m)} = X^{(m)} - X$$

である。従ってつぎの関係をうる。

$$\varepsilon^{(m)} = M \varepsilon^{(m-1)} = \dots = M^{(m)} \varepsilon^{(0)}, \quad \varepsilon^{(0)} \neq 0 \quad (2 \cdot 5 \cdot 3)$$

これから

$$\sigma \equiv \left(\frac{\|\varepsilon^{(m)}\|}{\|\varepsilon^{(0)}\|} \right)^{\frac{1}{m}} \leq (\|M^m\|)^{\frac{1}{m}}$$

とおけば、この式の対数をとることによって、

$$\sigma \leq e^{\frac{1}{m} \log \|M^m\|} = e^{-R_m(M)} \quad (2 \cdot 5 \cdot 4)$$

となる。 $N_m \equiv \frac{1}{R_m(M)}$ とすれば、

$$\sigma N_m \leq \frac{1}{e} \quad (2 \cdot 5 \cdot 5)$$

である。 σ は誤差ベクトル ε のノルムの平均減少率と考えられるから、(2・5・5)式から N_m は誤差ベクトル $\varepsilon^{(0)}$ のノルムを $1/e$ にするために必要な反復回数を目安を与える。換言すれば、 $R_m(M)$ は誤差ベクトルの対数減衰率と考えてよい。定義2・5・1を $A^m = \prod_{j=1}^m A_j$ なる場合に拡張する

と、 $\prod_{j=1}^m A_j$ に対する平均収束率は

$$R_m\left(\prod_{j=1}^m A_j\right) = -\frac{1}{m} \log\left(\rho\left(\prod_{j=1}^m A_j\right)\right) \quad (2 \cdot 5 \cdot 6)$$

となる。又 m を充分大きくした場合は次の定理によって、 $R_\infty(A)$ が与えられる。

定理 2・5・1

A を収束する $n \times n$ 複素行列であるとする。充分大なる数 m に対して、 m 回の反復に対する平均収束率 (The average rate of convergence) $R(A^m)$ は、

$$\lim_{m \rightarrow \infty} R(A^m) = -\ell_n \rho(A) \equiv R_\infty(A) \quad (2 \cdot 5 \cdot 7)$$

である。 $R_\infty(A)$ を A の漸近収束率 (The asymptotic rate of convergence) という。

ヤコビの行列とガウスザイデルの行列の収束については、Stein と Rosenberg⁽¹⁴⁾ が与えたつぎの定理がある。

定理 2・5・2

$n \times n$ なるヤコビ行列 $B = L + U$ を対角要素がすべて零なる非負行列とする。又 L_1 をガウスザイデルの行列とする。

このとき次の関係が成立する。

- 1、 $\rho(B) = \rho(L_1) = 0$
- 2、 $0 < \rho(L_1) \leq \rho(B) < 1$ (2・5・8)
- 3、 $1 = \rho(B) \leq \rho(L_1)$
- 4、 $1 < \rho(B) < \rho(L_1)$

従って、ヤコビの行列 B と、ガウスザイデルの行列 L_1 とは同時に収束或いは発散する。

定理 2・5・3

$A = (a_{ij})$ を対角要素の絶対値が非対角要素の絶対値より大なる $n \times n$ 行列とする。このとき行列 A のポイント・ヤコビ行列およびポイント・ガウ

スザイデル行列は共に収束する。そして(2・4・5)および(2・4・8)式による反復法は、任意の初期ベクトルに対して収束する。

SOR法についてはOstrowski - Reichの定理がある。

定理2・5・4

$A = D - E - E^*$ を $n \times n$ エルミート行列とする。ここに D はエルミートな正値行列であって、 $D - \omega E$ は $0 \leq \omega \leq 2$ に対して正則とする。このとき A が正値行列で $0 < \omega < 2$ になるときのみ $\rho(L\omega) < 1$ である。

SOR法の平均収束率はYeung⁽¹²⁾ によって求められている。

定理2・5・5

$A = D - E - F$ を正値エルミート行列とする。ここで D は正値対角行列、 F と E は上、下の三角行列である。このときもし A が正値行列ならば

$$\rho(L\omega) > \rho(L\omega_b) = \omega_{b-1}, \omega \neq \omega_0 \quad (2 \cdot 5 \cdot 9)$$

$$\omega_b = 1 + \left\{ \frac{\rho(B)}{1 + \sqrt{1 - \rho^2(B)}} \right\}^2 \quad (2 \cdot 5 \cdot 10)$$

である。(2・5・10)式の ω_b はSOR法の最適加速係数である。

$\rho(L\omega_0)$ が定理2・5・5によって分かれば、(2・5・1)式によって平均収束率を求めることができる。

2・6 ブロック反復法

前節で与えられたOstrowski-Reichの定理2・5・4において、 D は対角行列でなくともよい。しかしながら(2・4・12)式に従ってガウスザイデル或はSOR法で計算する場合、この対角行列でない行列方程式を直接解くことが必要である。 A がスチルチエス行列である場合、 D は三列の対角行列となるから、直接解はガウスの消去法を用いることによって容易にえられる。このときの行列 D は領域の一行或はそれ以上の行のベクトルを一つのブロックとみなしたものであってMultiline SORを形成する。

Irreducibleなスチルチエス行列 A においてはブロックSOR法の方がポイントSOR法よりも収束が早い。⁽¹³⁾

一般に k 行(列)をブロックとした方法を、 k 行SOR法と呼ぶことにすると、正方領域のラプラスの方程式に対する収束率は

$$R(L_{\omega_b}^{(k)}) \sim 2\sqrt{2}(\frac{k}{2}\lambda h^2)^{\frac{1}{2}} \quad h \rightarrow 0 \quad (2 \cdot 6 \cdot 1)$$

一方、 k 行ヤコビ法の平均収束率は

$$R(B^{(k)}) \sim \frac{k}{2} \lambda^2 h^2, \quad h \rightarrow 0 \quad (2 \cdot 6 \cdot 2)$$

で与えられる。 λ は次のヘルムホルツの方程式の主固有値であって、ラプラスの方程式の場合 $\lambda = 2\pi^2$ である。

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} + \lambda u &= 0 & (x, y) \in R \\ u(x, y) &= 0 & (x, y) \in \Gamma \end{aligned}$$

(2 · 6 · 1), (2 · 6 · 2) 式から k が増加すると漸近収束率はよくなることわかる。行列 B が (2 · 3 · 3) 式のような、指数 $p \geq 2$ の弱巡回行列であるときは、次の定理が成立する。⁽¹⁷⁾

定理 2 · 6 · 1

$B \equiv L + U$ を指数 $p \geq 2$ なる弱巡回行列とする。もし行列 B^p が 1 より小さい正の固有値をもつならば、

$$\rho(L\omega) > \rho(L\omega_b) = (\omega_b - 1)(p - 1), \quad \omega \neq \omega_b \quad (2 \cdot 6 \cdot 3)$$

ここに ω_b は次式を満足する $P/(P-1)$ より小さい正の根である。

$$\rho^p(B) \omega_b^p = P^p (P - 1)^{1-p} (\omega_b - 1) \quad (2 \cdot 6 \cdot 4)$$

更に $\rho(B)$ が 0 の方から 1 に近づくとき

$$R(L\omega_b) \sim \left\{ \frac{2P^2}{P-1} R(B) \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (2 \cdot 6 \cdot 5)$$

となる。 $R(B)$ はブロック・ヤコビ法の漸近収束率である。

集合 S をつぎのような性質をもつ行列 B の集合とする。

- (1) $B \geq 0$ であって、対角要素が零なる行列。
- (2) B は Irreducible であって、且収束行列である。
すなわち $0 \leq \rho(B) < 1$ 。
- (3) B は対称行列である。

このとき $B \in S$ なる B に対して次式が成立する。⁽¹⁰⁾

$$\omega_b - 1 \leq \rho(L_{B, \omega}) < \sqrt{\omega_b - 1} \quad (2 \cdot 6 \cdot 6)$$

ここに ω_b は $(2 \cdot 5 \cdot 10)$ 式の値をとる。 $(2 \cdot 6 \cdot 6)$ 式で等号が成立するのは、 B が調和配列をもった指数 2 の巡回行列のときである。従ってこれから $\rho(L_{B, \omega})$ の値が最小になるのは、 B が調和配列で、且指数 2 の巡回行列の場合であることがいえる。

2・7 ポアツソン方程式の 5 点ブロック・ガウスザイデル法^{(18), (19)}

一般に、ポアツソンの方程式 $(2 \cdot 7 \cdot 1)$ 式を $(2 \cdot 7 \cdot 2)$ 式の境界条件の下で、解く問題を考える。

$$-u_{xx} - u_{yy} = -\sigma(x, y), (x, y) \in R \quad (2 \cdot 7 \cdot 1)$$

$$u(x, y) = \tau(x, y), (x, y) \in \Gamma \quad (2 \cdot 7 \cdot 2)$$

ここで R は領域、 Γ は境界を表す。この問題は 2, 1 節においてのべたように、 $(2 \cdot 7 \cdot 3)$ の行列方程式を解く問題になる。

$$AX = K \quad (2 \cdot 7 \cdot 3)$$

$(2 \cdot 7 \cdot 3)$ 式中の行列 A は 5 列の対角対称行列である。格子点の数を $N \times N$ とすると A は次のように書ける。

$$A \equiv \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & & & \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} & & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & & & A_{N-1,N} & \\ & & & \cdot A_{N,N-1} & A_{N,N} \end{bmatrix} \quad (2 \cdot 7 \cdot 4)$$

ここに小行列 $A_{i,i}$, $A_{i,j}$ は $N \times N$ 正方行列であって、

$$A_{1,1} = A_{2,2} = \dots = A_{N,N}$$

$$A_{i,i} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & & & \\ -1 & 4 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 4 & -1 \\ & & & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

↑
N
↓

(2・7・5)

零行列でない $A_{i,j}$ は

$$A_{i,j} = - \begin{bmatrix} N \\ I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N \\ N \end{bmatrix}$$

である。

(2・7・4)式で表わされる A は格子点の番号を行(又は列)方向に順次与えたものであって、ブロック三列対角行列である。この行列は明らかにステルチエス行列で、指数2の弱巡回行列である。この番号順の行列はSOR法において最適パラメーターを用いた場合に、定理2・6・1によつて、最大の収束率を与える。この行列を用いた反復法については多くの文献がある。

今正方領域に対して、図2・7・1図に示すように、Xステンシルに含まれる5点を1つのブロックとみなして番号をつける。このとき行列 A は次のように変形される。

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \dots & A_{1,M} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} & \dots & A_{1,M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ A_{M,1} & A_{M,2} & \dots & \dots & A_{M,M} \end{bmatrix}$$

(2・7・5)

A は対称行列で対角要素が大きい値をもつ行列である。 N が4の整数倍であるとき、 $M = (\frac{N}{4})^2$ 、 n が4の整数倍でないときは $\frac{N}{4}$ の値を切上げて整数とした値の自乗となる。(2・7・5)式の行列の対角要素はすべてひとしく、 $A_{i,i}$ は次の形である。

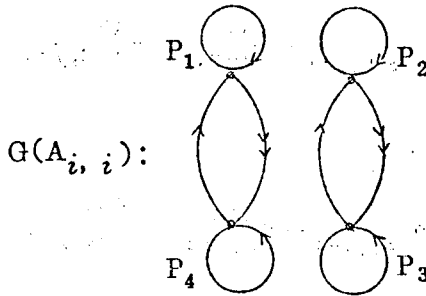
○	○	○	○	○	○	○
○	1	6	2	7	21	22
○	○	○	○	○	○	○
○	11	3(16)	8(12)	17	○	23
○	○	○	○	○	○	○
○	4	9(13)	5(18)	10	24	25
○	○	○	○	○	○	○
○	14	19	15	20	○	○
○	○	○	○	○	○	○
○	○	○	○	○	○	○
○	○	○	○	○	○	○

オ 2. 7. 1 図

$$A_{i,i} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix} \quad a_{j,j} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & & & \\ & 4 & -1 & & \\ -1 & -1 & 4 & -1 & -1 \\ & -1 & 4 & & \\ -1 & & & 4 & \end{bmatrix}$$

(2 7 6)

$a_{i,j}$, $i \neq j$ なる要素行列は -1 を要素とする行列である。 $A_{i,j}$ のグラフ $G(A_{i,i})$ をかくとオ 2. 7. 2 図のようになる。



オ 2. 7. 2 図

オ 2. 7. 2 図は、それぞれ独立な、強い結合のグラフが 2 つある。従って、定理 2. 3. 1 と定理 2. 3. 2 とから $A_{i,i}$ は指数 2 なる巡回行列の $2r$ 乗あって、且調和配列 (Consistently ordered) である。前節で論じたようにガウス・ザイデル法は A が指数 2 なる巡回行列であって、かつ調和配

列の場合最大の収束率を与える。複雑ではあるがこの番号順も調和配列の1つである。この方法をX形5点ブロック・ガウス・ザイデル法と呼ぶことにする。

次にこのX形5点ブロックガウス・ザイデル法の計算プログラムについて説明する。簡単のために、格子間隔はすべてひとしく h であるとする。 A を格子点 $(i, j), (j+1, j+1), (i-1, j+1), (i-1, j-1), (i+1, j-1)$ の5点における u に適用すると次の五元一次連立方程式をうる。

$$-4u_{i-1, j+1}^{(m+1)} + u_{i, j}^{(m+1)} = -2h^2 \sigma_{i-1, j+1} - u_{i, j+2}^{(m)} - u_{i-2, j+2}^{(m)} - u_{i-2, j}^{(m)} \\ \equiv b_{i-1, j+1}$$

$$-4u_{i+1, j+1}^{(m+1)} + u_{i, j}^{(m+1)} = -2h^2 \sigma_{i+1, j+1} - u_{i, j+2}^{(m)} - u_{i+2, j+2}^{(m)} - u_{i+2, j}^{(m)} \\ \equiv b_{i+1, j+1}$$

$$u_{i-1, j+1}^{(m+1)} + u_{i+1, j+1}^{(m+1)} - 4u_{i, j}^{(m+1)} + U_{i-1, j-1}^{(m+1)} + U_{i+1, j-1}^{(m+1)} = -2h^2 \sigma_{i, j} \equiv b_{i, j}$$

$$u_{i, j}^{(m+1)} - 4u_{i-1, j-1}^{(m+1)} = -2h^2 \sigma_{i-1, j-1} - u_{i-2, j}^{(m)} - u_{i-2, j-2}^{(m)} - u_{i, j-2}^{(m)} \\ \equiv b_{i-1, j-1}$$

$$u_{i, j}^{(m+1)} - 2u_{i+1, j-1}^{(m+1)} = -2h^2 \sigma_{i+1, j-1} - u_{i, j-2}^{(m)} - u_{i+2, j-2}^{(m)} - u_{i+2, j}^{(m)} \\ \equiv b_{i+1, j-1} \quad (2 \cdot 7 \cdot 7)$$

(2・7・7)式から $U^{(m+1)}$ は容易にとける。

$$u_{i, j}^{(m+1)} = -\frac{1}{12} (4b_{i, j} + b_{i-1, j+1} + b_{i+1, j+1} + b_{i-1, j-1} + b_{i+1, j-1})$$

$$u_{i-1, j+1}^{(m+1)} = \frac{1}{4} (u_{i, j}^{(m+1)} - b_{i-1, j+1})$$

$$u_{i-1,j+1}^{(m+1)} = \frac{1}{4}(u_{i,j}^{(m+1)} - b_{i+1,j+1})$$

$$u_{i-1,j-1}^{(m+1)} = \frac{1}{4}(u_{i,j}^{(m+1)} - b_{i-1,j-1}) \quad (2 \cdot 7 \cdot 8)$$

$$u_{i+1,j-1}^{(m+1)} = \frac{1}{4}(u_{i,j}^{(m+1)} - b_{i+1,j-1})$$

5点ブロックSOR法を行う計算式は(2・7・8)式から直ちに導かれる。

$$\hat{u}_{i,j}^{(m+1)} = -\frac{1}{12}(4b_{i,j} + b_{i-1,j+1} + b_{i+1,j+1} + b_{i-1,j-1} + b_{i+1,j-1})$$

$$u_{i,j}^{(m+1)} = u_{i,j}^{(m)} + \omega(\hat{u}_{i,j}^{(m+1)} - u_{i,j}^{(m)})$$

$$u_{i-1,j+1}^{(m+1)} = u_{i-1,j+1}^{(m)} + \omega\left\{\frac{1}{4}(\hat{u}_{i,j}^{(m+1)} - b_{i-1,j+1}) - u_{i-1,j+1}^{(m)}\right\}$$

$$u_{i+1,j+1}^{(m+1)} = u_{i+1,j+1}^{(m)} + \omega\left\{\frac{1}{4}(\hat{u}_{i,j}^{(m+1)} - b_{i+1,j+1}) - u_{i+1,j+1}^{(m)}\right\} \quad (2 \cdot 7 \cdot 9)$$

$$u_{i-1,j-1}^{(m+1)} = u_{i-1,j-1}^{(m)} + \omega\left\{\frac{1}{4}(\hat{u}_{i,j}^{(m+1)} - b_{i-1,j-1}) - u_{i-1,j-1}^{(m)}\right\}$$

$$u_{i+1,j-1}^{(m+1)} = u_{i+1,j-1}^{(m)} + \omega\left\{\frac{1}{4}(\hat{u}_{i,j}^{(m+1)} - b_{i+1,j-1}) - u_{i+1,j-1}^{(m)}\right\}$$

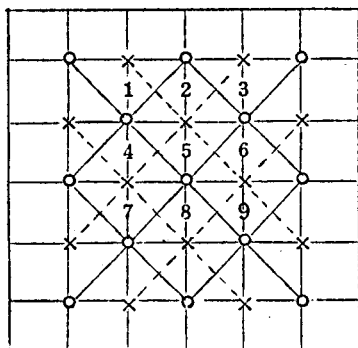
ここでは5点ブロック・ガウスザイデル法について考えることにする。

X形5点ブロック・ガウスザイデル法では才2・7・3図から分るように境界の近傍を除き各格子点の値は一回の掃引計算によって五回計算される。境界の近傍の点は才2・7・4図のようにその点の場所により5回以下となる。才2・7・4図から分かるように一回のみの掃引計算において、一回のみ計算される格子点の数は $3 \times 4 = 12$ 点、2回のも $3 \times 4 + \{(m-6) + (n-2)\} \times 2$ 、3回のも $3 \times 4 + \{(m-6) + (n-6)\} \times 2$ 、および5回のも $(m-4) \times (n-4)$ 点である。このように一回の掃引計算で同じ点の値が何回か計算されて新しくなるので延格子点の数を N_f とす

ると, $n, m > 2$ するとき, Nf の値は

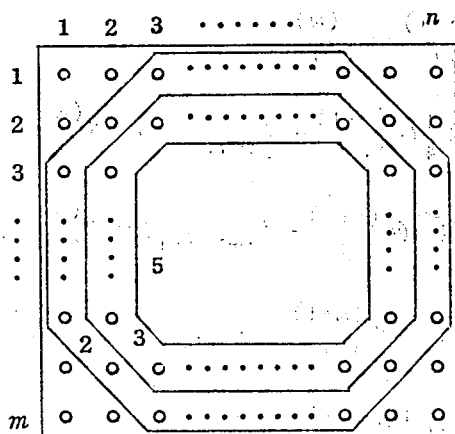
$$Nf = 5 \times (m-2)(n-2) \quad (2 \cdot 7 \cdot 10)$$

となる。 n, m はそれぞれ矩形領域の一辺の格子点の数である。



× ステンシル・ブロック

図 2・7・3 X ステンシル・ブロック・ガウス・ザイデル法の格子図



第 2・7・4 図

$n \times n$ 正方領域にこの方法を用いた場合, 一回の掃引計算で計算される延計算点の数を図 2・7・1 表に示した。

n が大きくなるに従って Nf/n^2 の値は 5 に近づく。

同様に, + 形 5 点ブロック・ガウス・ザイデル法の一回の掃引計算の延格子点の数は $(6n^2 - 36n + 40)$ となる。

X 形 5 点ブロック反復法および 1 行ガウスザイデル法の一点一回の計算に必要な演算回数および NEAC 2101 の所要計算時間は図 2・7・2 表のと

おりである。 $n \times n$ 格子領域を計算するとき 5 点ブロック・ Gauss ザイデル法は一回の掃引計算で延 $5(n-2)^2$ 格子点の計算をすることになるから、一回の反復に要する計算時間は $43.7 \times 5(n-2)^2 \text{ ms}$ である。一方一行ブロック・ Gauss ザイデル法では $131.6 n^2 \text{ ms}$ である。従って両者の比を r とすると、

$$r = \frac{43.7 \times 5(n-2)^2}{131.6 n^2} = 1.66 \frac{(n-2)^2}{n^2} \quad (2 \cdot 7 \cdot 11)$$

である。この r の値を n に対して計算し、図示すると、 $2 \cdot 7 \cdot 5$ 図のようになる。 $n=10$ の近傍では $r \simeq 1$ である。 $n \rightarrow \infty$ のときに r の値は 1.66 に漸近する。

表 2・7・1 表
一反復計算における
延格子点数

n	Nf	Nf/n^2
4	20	1.25
5	45	1.8
6	80	2.22
7	125	2.55
8	180	2.81
9	245	3.02
10	320	3.20
11	405	3.35
15	845	3.76
20	1620	4.05
40	7220	4.51

図 2・7・5 領域一辺の格子点の数 n と 5 点および 1 行ブロック・ Gauss ザイデル法の一反復計算時間の比 r の関係

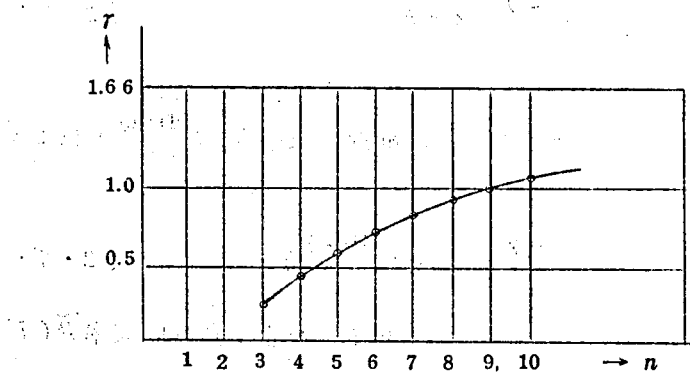


表 2・7・2 表 5 点および 1 行ブロック・ Gauss・ Zaidel 法の一反復計算の演算回数と NEAC 2101 による計算時間

	乗 算	除 算	加減算	計算時間
5 点ブロック・ Gauss・ Zaidel	1/5	1	4	43.7ms
1 行ブロック・ Gauss・ Zaidel	4	2	6	131.6ms
演算速度 (NEAC 2101)	10.1ms	24.0ms	7.2ms	—

同様に+形5点ブロック・ガウス・ザイデル法と1行ブロック・ガウス・ザイデル法との計算時間の比は

$$r = \frac{43.7(6n^2 - 36n + 40)}{131.6n^2} \quad (2 \cdot 7 \cdot 11')$$

となる。

X形5点ブロック・ガウスザイデル法は図2・7・3図から明らかなように格子間隔を $\sqrt{2}h$ とした2組の格子によって、それぞれ独立に格子点の値を繰返し計算するものである。図2・7・3図の奇数番号の点についてみると、格子間隔 $2h$ の格子によるヤコビ法の収束率は $2h^2$ で近似される。ガウスザイデル法の収束率は $4h^2$ で近似される。ここに、 $h = \pi / (n+1)$ である。

X形5点ブロック・ガウスザイデル法及びガウス・ザイデル法の一掃計算に対する延計算格子点の数の比は $m=n$ なるとき $5(n-2)^2/n^2$ であるから、X形5点ブロック・ガウスザイデル法の漸近収束率を、 $R(L_1^{(5)})$ とするとき、

$$R(L_1^{(5)}) = \frac{5(n-2)^2}{n^2} \times 4h^2 \quad (2 \cdot 7 \cdot 12)$$

となる。

1行ブロック・ガウスザイデル法の漸近収束率 $R(L_1^{(\text{line})})$ は $2h^2$ であるから、次式をうる

$$R(L_1^{(5)}) \sim \frac{10(n-2)^2}{n^2} R(L_1^{(\text{line})}) \quad (2 \cdot 7 \cdot 13)$$

同様に、+形5点ブロック・ガウスザイデル法の漸近収束率 $\widetilde{R}(L_1^{(5)})$ は

$$\begin{aligned} \widetilde{R}(L_1^{(5)}) &\sim \frac{(6n^2 - 36n + 40)}{n^2} h^2 \\ &= \frac{(6n^2 - 36n + 40)}{2n^2} R(L_1^{(\text{line})}) \quad (2 \cdot 7 \cdot 14) \end{aligned}$$

となる。

又、計算時間を考慮した実効収束率 $R_E(L_1^{(5)})$ 及び $\widetilde{R}_E(L_1^{(5)})$ は(2・7・11)式並びに(2・7・11')式から

$$R_E(L_1^{(5)}) \sim \frac{131.6 \times 2}{47.3} R_E(L_1^{(\text{line})})$$

$$\approx 5.5 R_E(L_1^{(\text{line})}) \quad (2 \cdot 7 \cdot 15)$$

$$\widetilde{R}_E(L_1^{(5)}) \sim \frac{131.6}{47.3 \times 2} R_E(L_1^{(\text{line})})$$

$$\approx 1.4 R_E(L_1^{(\text{line})}) \quad (2 \cdot 7 \cdot 15')$$

となる。

一行BSQR (Block successive overrelaxation)法の漸近収束率 $R(L_{\omega_b}^{(\text{line})})$ の値は n が充分大なときつぎの関係がある。

$$R(L_{\omega_b}^{(\text{line})}) \sim 2(R(L_1^{(\text{line})}))^{\frac{1}{2}} \quad (2 \cdot 7 \cdot 16)$$

又正方形領域のポアッソンの方程式を解く場合には、 $h = \frac{\pi}{n+1}$ とするとき、

$$R(L_{\omega_b}^{(\text{line})}) \sim 2h^2$$

$$R(L_{\omega_b}^{(\text{line})}) \sim 2\sqrt{2}h \quad (2 \cdot 7 \cdot 17)$$

が成立する。(10, chap 6) ここに(2・7・13)および(2・7・16)式から、次の関係が得られる。

$$R(L_{\omega_b}^{(\text{line})}) \sim \frac{2n}{\sqrt{10(n-2)}} (R(L_1^{(5)}))^{\frac{1}{2}} \quad (2 \cdot 7 \cdot 18)$$

$$\text{又は } R(L_1^{(5)}) \sim \frac{10(n-2)^2}{4n^2} (R(L_{\omega_b}^{(\text{line})}))^2 \quad (2 \cdot 7 \cdot 19)$$

(2・7・17)及び(2・7・19)式から $n > 16$ なるとき次の関係が成立つ。

$$R(L_1^{(5)}) < R(L_{\omega_b}^{(\text{line})}) \quad (2 \cdot 7 \cdot 20)$$

従って、 $n > 16$ なるとき、X形5点ブロック・ガウスザイデル法の漸近収束率は一行ブロック・ガウスザイデル法よりも大きく、一行BSOR法よりも小さい。

5点BSOR法についても(2・7・16)式と同様な関係が成立つから、

(2・7・18)式からつぎの関係が成立する。

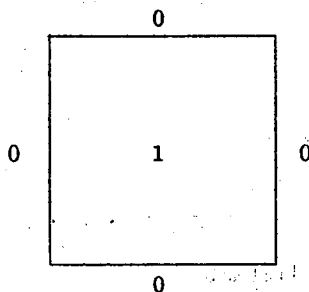
$$R(L_{\omega_b}^{(5)}) \sim \frac{\sqrt{10}(n-2)}{n} R(L_{\omega_b}^{(\text{line})}) \quad (2 \cdot 7 \cdot 21)$$

(2・7・15)式から明らかなように、5点ブロック・ガウスザイデル法は一行ブロック・ガウスザイデル法の約5.5倍の計算速度をもつ。又 n が16までの場合は、5点ブロック・ガウス・ザイデル法の方が一行BSOR法よりも収束が早い。

2・8 数値計算例⁽¹⁹⁾

例題としては、正方形領域におけるラプラスの方程式をえらび、才2・8・1図に示すように、境界値はすべて零とし、領域内の初期値はすべて1とする。

5点ブロック法において、5点のえらび方は+形とX形が考えられる。



才2・8・1図 境界値および初期値

収束率を比較するために、この例題を次の四通りの方法によって計算した。

1. +形5点ブロック・ガウス・ザイデル法(+5BGS)
2. X形5点ブロック・ガウス・ザイデル法(X5BGS)
3. 一行ブロック・ガウス・ザイデル法(LBGS)
4. 一行BSOR法(LBSOR)

収束判定値 δ は 10^{-3} とし、収束の判定条件は、すべての格子点における残差の絶対値が δ より小なることである。収束率の比較のためには漸近収束率および次に定義する実効収束率を用いる。

収束行列 C による、一反復計算中の一格子点当りの平均乗除算回数を $M(C)$ とすると、実効収束率 $R_E(C)$ を次式のように定める。

$$R_E(C) = \frac{R_\infty(C)}{M(C)} \quad (2 \cdot 8 \cdot 1)$$

$M(C)$ の値は計算プログラムから容易に求められる。 $R_\infty(C)$ の値は $R_\infty(C) = -\rho(C)$ から求まる。長方形領域において、各辺の分割数を N および M とすれば、ラプラスの方程式の差分近似によって得られる行列方程式のヤコビ行列 B は、次のスペクトル半径をもつ。

$$\rho(B) = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\pi}{N} + \cos \frac{\pi}{M} \right) \quad (2 \cdot 8 \cdot 2)$$

$\rho(L_1)$ をガウス・ザイデル行列のスペクトル半径とすると、

$$\rho(L_1) = \rho^2(B)$$

なる関係がある。最適パラメータを用いたSOR法のスペクトル半径は $(\omega_b - 1)$ であって、その漸近収束率 $R_\infty(L\omega_b)$ は定理 2・6・1 から

$$R_\infty(L\omega_b) \sim 2\sqrt{2} \{ R(B) \}^{\frac{1}{2}} = 2 \{ R(L_1) \}^{\frac{1}{2}} \quad (2 \cdot 8 \cdot 3)$$

で与えられる。

一辺の分割数を N とし、 $h = \pi/N$ になるとき、各種の反復法の漸近収束率は表 2・8・1 表のようになる。

反 復 法	推定収束率
Point Jacobi	$\frac{h^2}{2}$
Point Gauss-Seidel	h^2
Line Gauss-Seidel	$2h^2$
X形5点ブロック・ヤコビ	$2h^2$
X形5点ブロックガウスザイデル	$4h^2$
Optimal Line Over Relaxation	$2\sqrt{2}h$

表 2・8・1 表 漸近収束率

実験的にスペクトル半径の値を求めるには次の方法による。反復法による

k 回目の計算後のベクトル U の値を U^k とする。このときつぎのベクトル Y_k を考える。

$$Y_k = U_k - U_{k-1} \quad (2 \cdot 8 \cdot 4)$$

オ 2・5 節と同様に、誤差行列 C について次式が成立する。

$$Y_k = [C(\omega)]^k Y_0 \quad (2 \cdot 8 \cdot 5)$$

ここに ω は SOR 法の加速係数である。 $\omega = 1$ なるときの行列 $C(1)$ はガウス・ザイデル行列であって、このときのスペクトル半径を $\eta_1^{(1)}$ とすると、Forsythe⁽²⁰⁾ より、

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|Y_{k+1}\|}{\|Y_k\|} = \eta_1^{(1)} \quad (2 \cdot 8 \cdot 6)$$

となる。更に $\|Y_k\|_1$ を Y_k の 1 次のノルムとし、次式で Q_k を定める。

$$Q_k = \frac{\|Y_{k+1}\|_1}{\|Y_k\|_1} \quad (2 \cdot 8 \cdot 7)$$

このとき、(2・8・6) 式から $\eta_1^{(1)}$ は次式から求められる。

$$\lim_{k \rightarrow \infty} Q_k = \eta_1^{(1)} \quad (2 \cdot 8 \cdot 8)$$

(2・8・8) 式から $\eta_1^{(1)}$ が実験的に求まる。この $\eta_1^{(1)}$ を $\rho(C)$ の代りに用いると、 $R(C) = -\ln \rho(C)$ の関係から $R_\infty(C)$ を決定することが出来る。

オ 2・8・2 表は、 10×10 の正方形領域について、+5 BGS, X5 BGS, LBGS 及び LSOR 法による計算結果である。表中の計算時間は NEAC 2101 による値を示した。

漸近収束率は反復回数の推定値 N^E を与える。収束判定値を δ とするとき、

$$N^E = \frac{-\log \delta}{R(C)} \quad (2 \cdot 8 \cdot 8)$$

である。 $\delta = 10^{-8}$ の場合

$$N^E = \frac{6.90776}{R(C)} \quad (2 \cdot 8 \cdot 9)$$

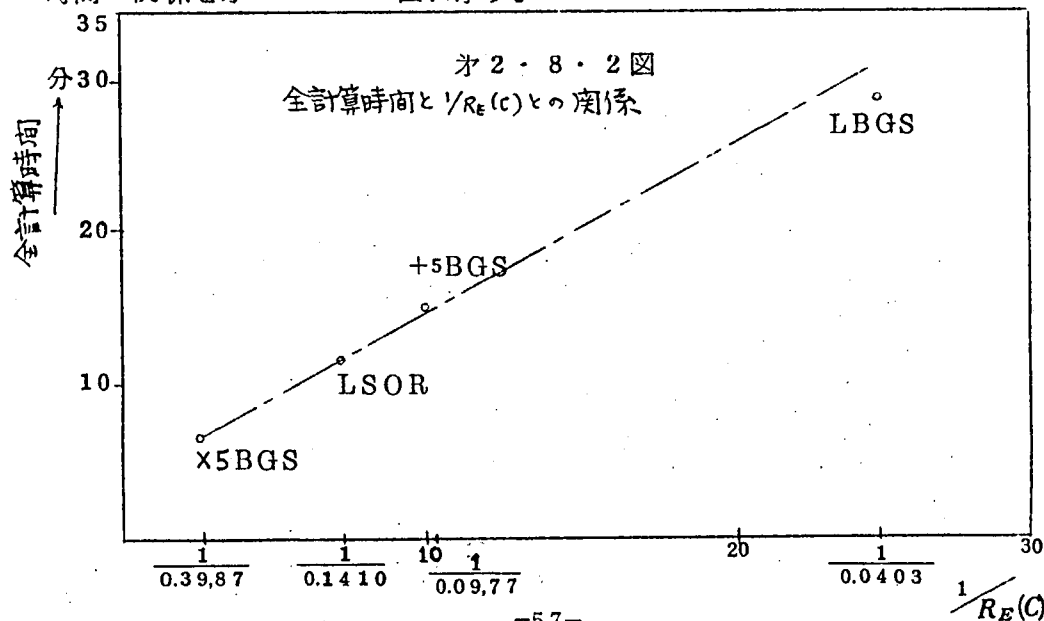
となる。

+5BGS, X5BGS, LBGS, LSOR法に
 対し 2・8・2 表より 10×10 正方形領域におけるラプラスの方程式を
 解いた場合の収束度比較

方法	$\rho(c)$ (η_1)	$R(c)$	$M(c)$	$R_E(C)$	一掃引 計算時間	反復回数	全 計算時間	N^E
+5BGS	0.6726 (0.6726)	0.3322 (0.3966)	3.4	0.0977 (0.1457)	5.3 秒	17	90.1 秒	20
X5BGS	0.3146 (0.3146)	1.359 (1.1590)	3.4	0.3987 (0.3409)	4.7 "	7	37.6	5
LBGS	0.8642 (0.7856)	0.2416 (0.2414)	6	0.0403 (0.0402)	5.4 "	32	172.8	29
LSOR	0.42 (0.4332)	0.8675 (0.8370)	7	0.1410 (0.1196)	6.9 "	10	69.0	8

対し 2・8・1 表中 $\rho(c)$ はスペクトル半径であって、推定値及び実験値を示している。カッコ中に示した値は (2・8・8) 式から求めた実験値である。 $R(C)$ は漸近収束率であって前節の (2・7・3), (2・7・14) 及び (2・7・17) 式から求めた推定値及び η_1 から計算した実験値である。 $M(C)$ は 1 点 1 掃引当りの演算回数で $R_E(C)$ は実効収束率である。

$1/R_E(C)$ は全計算時間の目安を与えるものである。 $1/R_E(C)$ と全計算時間の関係を対し 2・8・2 図に示す。



計算結果から長方形領域のラプラスの方程式の解法として、X形5点ブロック・ガウス・ザイデル法は、相当によい収束を示し、計算時間も短い。分割数が20位迄は明らかにLSORより優れており、加速係数の選定等の必要もないので有利と考えられる。ただし、長方形以外の領域に対して、使用の困難となる場合があり、これがこの方法の欠点である。

第3章 非対称パラメーターを用いたADI法 (ADIN法)

楕円型および放物型偏微分方程式の差分近似によって作られる行列方程式はADI法によって、迅速かつ確実に解くことが出来る。この方法については、PeacemanとRachford およびWachspressとHabetler 等による多くの論文がある。これらの方法は、いずれも収束パラメータとして、正の対角行列を用いている。本章ではオペレータ行列が正値対称であり、収束パラメータとして用いる行列が正値であつたならば、収束行列は非対称行列であっても収束することを証明した。^{(26 a), (39)}

この方法を便宜上、ADIN法 (Alternative Direction Implicit Iterative Method with Nonsymmetric Parameter) と呼ぶことにする。ADIN法の平均収束率は、近似的に、ADI法の平均収束率の1～2倍である。数種の領域についてラプラスの方程式をといた結果、ADIN法の収束はADI法よりも、一般に早いことがたしかめられた。^{(26), (39)}

3.1 行列方程式

次の自己随伴型偏微分方程式を考える。

$$G(x, y) u - \frac{\partial}{\partial x} \left[A(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[C(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} \right] = S(x, y) \quad (3.1.1)$$

但し、 $G > 0$, $A, C > 0$, $(x, y) \in R$

R を二次元の領域、 Γ を R の境界とする。今(3.1.1)式を(3.1.2)式の境界条件、即ち第1種デリクレの条件の下で解く。

$$u = u(x, y), (x, y) \in \Gamma \quad (3.1.2)$$

差分近似を行なうために正方網を用い、格子の x, y 方向の間隔をそれぞれ h, k とする。次に境界に隣接した格子点を境界点としてえらび、この点の境界値を近似的に与える。そして、領域内の格子点の値 $u(x_i, y_j)$ を未知数とする。ここで $R(h, k)$ 内において $-h k \partial \left[A \frac{\partial u}{\partial x} \right] / \partial x$ を H , $h k \partial \left[C \frac{\partial u}{\partial y} \right] / \partial y$ を V で近似する。 H と V は(3.1.3), (3.1.4)式で定める差分オペレーター・マトリックスである。

$$\begin{aligned} H u(x, y) = & -a(x, y) u(x+h, y) + 2b(x, y) u(x, y) \\ & -c(x, y) u(x-h, y) \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

$$Vu(x, y) = -\alpha(x, y)u(x, y+k) + 2\beta(x, y)u(x, y) - \gamma(x, y)u(x, y-k) \quad (3.1.4)$$

上式中, $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ はそれぞれ次式の値で示される。

$$a = kA(x + \frac{h}{2}, y)/h, \quad c = kA(x - \frac{h}{2}, y)/h, \quad 2b = a + c \quad (3.1.5)$$

$$\alpha = hc(x, y + \frac{k}{2})/k, \quad \gamma = hc(x, y - \frac{k}{2})/k, \quad 2\beta = \alpha + \gamma \quad (3.1.6)$$

このように定めると, H と V は, 領域 $R(h, k)$ 内で $u(x_i, y_j)$ からなるベクトル空間に作用する対称行列となる。

簡単のために, $h = k$ なる場合を考えると, $h > 0$ となる h に対して, 次の (3.1.7) 式は (3.1.1) 式の第一種境界値問題の近似解を与える。

$$(H + V + \Sigma)U = K \quad (3.1.7)$$

(3.1.7) 式中 Σ は $h^2 G(x_i, y_i)$ に対応する差分オペレーターであつて, 正の対角行列である。ベクトル K は源泉項 $h^2 S(x_i, y_j)$ 及び (3.1.3), (3.1.4) 式の右辺に表われる Γ_h 上の格子点の値とを加えたものからなる。 H と V は実数の対称行列であつて, かつ非対角要素が零か負の値である正值行列である。即ち, H および V はステルチエス行列である。正方格子の格子点がすべて, 連結され欠陥のない場合は対角要素中に零の要素は生じないから, $H + V$ および $H + V + \Sigma$ は Reducible ではない。従つて, これらの行列の逆行列はすべて正の要素をもっている。 H と V とは対角要素の絶対値が他の要素の絶対値より大きい行列であるから任意の正の数 θ に対する行列, $H + \theta \Sigma$, $V + \theta \Sigma$ もやはり H 及び V と同様な性質をもつ行列である。正の数 θ_1 および θ_2 に対する, $H + \theta_1 \Sigma$ および $V + \theta_2 \Sigma$ も同様である。格子点の番号を行の方向につけると, H は三行対角行列 (Tridiagonal matrix) となる。又列の方向に番号をつけると V は Tridiagonal 行列となる。しかしながら, H と V を同時に Tridiagonal 行列にすることは出来ない。

第2種のデリクレの境界値問題に対しても, (3.1.7) 式と同じ形の式を

用いて解くことができる。

3.2 基本的なADI法⁽²⁵⁾

ベクトル方程式 (3.1.7) は、任意の行列 D および E を用いて、次の (3.2.1) 或は (3.2.2) 式のように変形される

$$(H + \Sigma + D)U = K - (V - D)U \quad (3.2.1)$$

$$(V + \Sigma + E)U = K - (H - E)U \quad (3.2.2)$$

ここに、 $(H + \Sigma + D)$ および $(V + \Sigma + E)$ は正則である。

Peaceman および Rachford⁽²¹⁾ は $\Sigma = 0$, $E = \rho I$ なる場合をとり扱っている。このとき、(3.2.1) および (3.2.2) 式は次のようになる。

$$(H + \rho I)U = K - (V - \rho I)U \quad (3.2.3)$$

$$(V + \rho I)U = K - (H - \rho I)U \quad (3.2.4)$$

Wachspress および Habetler は更に、 $\Sigma \neq 0$, $D = E$ の場合について一般化している。又、Peaceman および Rachford は、 $\Sigma = 0$, $D = E = \rho I$ の場合に、収束を早めるため、正の常数 ρ_n の系列を適当にえらび、この ρ_n を巡回して用いる、方法を提案している。この方法は、つぎの (3.2.5) および (3.2.6) 式によって、 $U_n, U_{n+\frac{1}{2}}, U_{n+1}, \dots$ を計算するものである。

$$(H + \Sigma + D_n)U_{n+\frac{1}{2}} = K - (V - D_n)U_n \quad (3.2.5)$$

$$(V + \Sigma + E_n)U_{n+1} = K - (H - E_n)U_{n+\frac{1}{2}} \quad (3.2.6)$$

左辺のオペレーター-行列は、前節でのべた変換によって、Tridiagonal 行列になるので、ガウスの消去法によって、容易に解くことが出来る。

Peaceman - Rachford 法は、(3.2.5) および (3.2.6) 式において、 $D_n = \rho_n I$, $E_n = \tilde{\rho}_n I$ としたものである。

$$U_{n+\frac{1}{2}} = (H + \Sigma + \rho_n I)^{-1} \{K - (V - \rho_n I)U_n\} \quad (3.2.7)$$

$$U_{n+1} = (V + \Sigma + \tilde{\rho}_n I)^{-1} \{K - (H - \tilde{\rho}_n I)U_{n+\frac{1}{2}}\} \quad (3.2.8)$$

この計算法の収束率は、 $\rho_n, \tilde{\rho}_n$ のえらび方によつて左右される。

Douglas および Rachford は Peaceman - Rachford 法を, $\Sigma \approx 0$ なる場合に, 次式のように変形している。

$$U_{n+\frac{1}{2}} = (H_1 + \rho_n I)^{-1} [K - (V_1 - \rho_n I) U_n] \quad (3.2.9)$$

$$U_{n+1} = (V_1 + \rho_n I)^{-1} [V_1 U_n + \rho_n U_{n+\frac{1}{2}}] \quad (3.2.10)$$

ここに, $H_1 = H + \frac{1}{2} \Sigma$, $V_1 = V + \frac{1}{2} \Sigma$ である。この式は, (3.2.7), (3.2.8) 式を $D_n = E_n = \rho_n I - \frac{1}{2} \Sigma$ として, 変形したもので, $U_n = U_{n+\frac{1}{2}} = U_{n+1}$ が成立するとき, (3.2.9) 式と (3.2.10) 式とはひとしくなる。この方法は三次元の取扱いが容易となる利点をもっている。^{(26), (26a), (39)}

3.3 非対称パラメーターを用いた ADI 法 (ADIN 法)

Peaceman - Rachford 法および Wachspress - Habetler 法は収束パラメーター行列 D , E を対角行列或は対称行列としている。このため, $U_{n+\frac{1}{2}}$ を計算するときは, U_n のみの値を, U_{n+1} を計算するときは, $U_{n+\frac{1}{2}}$ の値のみを既知量として使っている。たとえば, $U_{n+\frac{1}{2}}$ を計算する際には, (3.2.7) 式を用いて, 一行づつガウスの消去法を適用する。したがって, 第 2 行の格子点の値を計算しようとするときには, 既に第 1 行の $U_{n+\frac{1}{2}}$ の値は決定している。この既に求まっている $U_{n+\frac{1}{2}}$ の値を何等かの方法によって, 第 2 行の計算に使うことができれば, 収束が早くなることが予想される。このことを, 収束性を損することなく, 実現するために, 筆者は, $U_{n+\frac{1}{2}}$ を計算する際に, まづ一行おきに, その行の格子点における $U_{n+\frac{1}{2}}$ の値を計算し, 次に残りの行における $U_{n+\frac{1}{2}}$ の値を, すでに計算した行の $U_{n+\frac{1}{2}}$ の値を用いて計算する方法を考えた。 U_{n+1} についても同様に計算する。⁽³⁹⁾

このような計算法において, 収束行列 D , E は非対称行列になる。このとき D と E は, $D \approx E$ であって, $\|D\| = \|E\|$ なるノルムの値がひとしい正値行列である。又 H_1 と V_1 は, 後述するように, 正値対称行列でなければならない。^(26a)

今 $D = \rho L$, $E = \rho W$ とする計算式は (3.3.1), (3.3.2) 式となる

$$(H_1 + \rho L) U_{n+\frac{1}{2}} = K - (V_1 - \rho L) U_n \quad (3.3.1)$$

$$(V_1 + \rho W) U_{n+1} = K - (H_1 - \rho W) U_{n+\frac{1}{2}} \quad (3.3.2)$$

ここに、 L は次の形の行列である。

$$LU = \begin{bmatrix} I & O \\ C & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U^1 \\ U^2 \end{bmatrix} \quad (3.3.3)$$

$$C = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}I & -\frac{1}{2}I & 0 \\ & & -\frac{1}{2}I \\ & 0 & & -\frac{1}{2}I \end{bmatrix}$$

$U^{(1)}$ は奇数行或は列の格子点における U の値を要素とするベクトルであり
 $U^{(2)}$ は偶数行或は列の格子点における U の値を要素とするベクトルである。
 格子点の番号を列の方向につけると、 W は変換されて、格子点の番号を行の
 方向につけた場合の L の形と同じになる。

Peaceman - Rachford 法と同様に、収束を早めるために、 $D_n = \rho_n L$ 、
 $E_n = \rho_n W$ なる正の常数 ρ_n なる数列を用いると、(3.3.4)および(3.3.5)式をうる。

$$(H_1 + \rho_n L) U_{n+\frac{1}{2}} = K - (V_1 - \rho_n L) U_n \quad (3.3.4)$$

$$(V_1 + \rho_n W) U_{n+1} = K - (H_1 - \rho_n W) U_{n+\frac{1}{2}} \quad (3.3.5)$$

上の二式によって定まる計算法を非対称パラメーターを用いたADI法(A
 DIN法)或はInterlacing Scanning ADI 法(IADI 法)とよぶ
 ことにする。(26), (39)

(3.3.4), (3.3.5)式を奇数行, 偶数行, 奇数列及び偶数列の格子点の値
 $u_{i,j,n}$ について表すとつぎのようになる。 $n(=0,1,2,\dots)$ は計算回数を示し
 ている。

奇数行(第1段階)

$$\begin{aligned} & -u_{i-1,j,n+1} + (2+\rho) u_{i,j,n+1} - u_{i+1,j,n+1} \\ & = u_{i,j-1,n} - (2-\rho) u_{i,j,n} + u_{i,j+1,n} \end{aligned} \quad (3.3.6a)$$

偶数行(第2段階)

$$\begin{aligned} & -u_{i-1,j,n+2} + (2+\rho) u_{i,j,n+2} - u_{i+1,j,n+2} \\ & = \frac{\rho}{2} (u_{i,j-1,n+1} + u_{i,j+1,n+1}) + (1 - \frac{\rho}{2}) (u_{i,j-1,n} + u_{i,j+1,n}) \end{aligned}$$

$$-(2-\rho) u_{i,j,n} \quad (3.3.6, b)$$

奇数列 (第3段階)

$$\begin{aligned} & -u_{i,j-1,n+3} + (2+\rho) u_{i,j,n+3} - u_{i,j+1,n+3} \\ & = u_{i-1,j,n+2} - (2-\rho) u_{i,j,n+1} + u_{i+1,j,n+2} \quad (3.3.6, c) \\ & -u_{i,j,n+3} + (2+\rho) u_{i,j+1,n+3} - u_{i,j+2,n+3} \\ & = u_{i-1,j+1,n+1} - (2-\rho) u_{i,j+1,n+2} + u_{i+1,j+1,n+1} \quad (3.3.6, c') \end{aligned}$$

偶数列 (第4段階)

$$\begin{aligned} & -u_{i,j-1,n+4} + (2-\rho) u_{i,j,n+4} - u_{i,j+1,n+4} \\ & = \frac{\rho}{2} (u_{i-1,j,n+3} + u_{i+1,n+3}) + (1-\frac{\rho}{2}) (u_{i-1,j,n+1} + u_{i+1,j,n+1}) \\ & \quad - (2-\rho) u_{i,j,n+1} \quad (3.3.6, d) \\ & -u_{i,j,n+4} + (2-\rho) u_{i,j+1,n+4} - u_{i,j+2,n+4} \\ & = \frac{\rho}{2} (u_{i-1,j+1,n+3} + u_{i+1,j+1,n+3}) + (1-\frac{\rho}{2}) (u_{i-1,j+1,n+2} + \\ & \quad u_{i+1,j+1,n+2}) - (2-\rho) u_{i,j+1,n+1} \quad (3.3.6, d') \end{aligned}$$

(3.3.6) 式 (C), (C'), (d) および (d') 中の j は奇数と考えている。(3.3.6) 式によって, 計算プログラムを作る場合, (C) と (C') 式のプログラムはひとしく, 又 (d) と (d') 式のプログラムはひとしい。従って合計4通りのサブ・プログラムが必要である。

3.4 ADIN法の収束定理⁽²⁶⁾

(3.3.4), (3.3.5) 式を組合わせると次の (3.4.1) 式をうる。

$$U_{n+1} = T_{\rho n} U_n + g_{\rho n} (K), \quad n \geq 1 \quad (3.4.1)$$

$$\text{ここに, } T_{\rho n} \equiv (V_1 + \rho_n W)^{-1} (\rho_n W - H_1) (H_1 + \rho_n L)^{-1} (\rho_n L - V_1) \quad (3.4.2)$$

$$g_{\rho n} (K) \equiv (V_1 + \rho_n W)^{-1} \{ (\rho_n W - H_1) (H_1 + \rho_n L)^{-1} + I \} K \quad (3.4.2')$$

$T_{\rho n}$ は Peaceman - Rachford 行列に相当するものである。ここでは, $T_{\rho n}$ を収束判定行列と呼ぶ。

今, $\epsilon_n = U_n - U$ を U_n に関する誤差ベクトルとすると, $\epsilon(n+1) = T_{\rho n} \epsilon(n)$ である。

一般に m 回の繰返し計算後の誤差ベクトルを $\epsilon(m)$ とすると次式が成立

する。

$$\epsilon(m) = \left(\prod_{n=0}^{m-1} T_{\rho n} \right) \epsilon(0), \quad m \geq 1 \quad (3.4.3)$$

ここに, $\prod_{n=0}^m T_{\rho n} = T_{\rho m}, T_{\rho m-1}, \dots, T_{\rho 0}$ である。

ρ_n は反復回数 n と共に変化する正の常数である。従って, $\epsilon(m)$ が m の増大に伴って零に近づくための条件は,

$$T_{\rho n} < 1, \quad n = 1, \dots, m \quad (3.4.4)$$

である。ここで, ADIN法の収束判定行列のスペクトル半径 $A(T_{\rho n})$ が1より小なることを証明するために, 次の系⁽²⁵⁾を準備する。

系 3.4.1

Q を任意の正値実数行列とすると, 任意の実ベクトル x のノルムを $\|x\| = (x^T Q x)^{\frac{1}{2}}$ で定義する。もし実数行列 M が, すべての実ベクトル x に対して $\|Mx\| \leq r \|x\|$ なるとき $A(M) \leq r$ である。

系 3.4.2

P と S は共に正値実数行列であって, S は対称行列であるとする。任意の実ベクトル x のノルムを $\|x\| = (x^T S^{-1} x)^{\frac{1}{2}}$ と定義するとき, $Qx = (P - S)(P + S)^{-1}x$ のノルムは1より小である。

今, ADIN法の収束判定行列 T_{ρ} について考える。(3.4.2)式の行列 T_{ρ} の固有値は, これに相似な行列 \tilde{T}_{ρ} の固有値にひとしい。 \tilde{T}_{ρ} としてつぎの行列を作る。

$$\tilde{T}_{\rho} = (\rho_n W - H_1)(\rho_n L + H_1)^{-1}(\rho_n L - V_1)(\rho_n W + V_1)^{-1} \quad (3.4.5)$$

スペクトル半径とスペクトルノルムの性質から

$$\begin{aligned} A(T_{\rho n}) &= A(\tilde{T}_{\rho n}) \leq \|\tilde{T}_{\rho n}\| \\ &\leq \|(\rho_n W - H_1)(\rho_n L + H_1)^{-1}\| \cdot \|(\rho_n L - V_1)(\rho_n W + V_1)^{-1}\| \end{aligned} \quad (3.4.6)$$

となる。 $A(T_{\rho n})$ の値は(3.4.6)式右辺の各スペクトルノルムの値

が 1 より小なるとき, 1 より明らかに小である。

(3.4.6) 式右辺の $\|(\rho_n W - H_1)(\rho_n L + H_1)^{-1}\|$ が 1 より小なる為の必要条件を考える。ここで, H_1 は正値対称行列とする。

便宜上, $\rho_n W = q$, $\rho_n L = p$ とおきかえて,

$$Q = (q - s)(p + s)^{-1} \quad (3.4.7)$$

なる行列のノルムを考える。 $x \neq 0$ なるベクトル x に対して, Q のノルムは定義によって, 1 より小なるとき,

$$\|Q\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Qx\|}{\|x\|} < 1$$

である。従って,

$$\|(q - s)(p + s)^{-1} x\| < \|x\| \quad (3.4.8)$$

$(p + s)^{-1} x = y$ とおくと, $x = (p + s)y$ であるから, x の代りに y を用いると, (3.4.9) 式をうる。

$$\|(q - s)y\| < \|p + s\| \|y\| \quad (3.4.9)$$

$\|x\| = (x^T s^{-1} x)^{\frac{1}{2}}$ なる定義によって, (3.4.9) 式は

$$[(q - s)y]^T s^{-1} [(q - s)y] < [(p + s)y]^T s^{-1} [(p + s)y]$$

更に,

$$y^T (p^T s^{-1} p - q^T s^{-1} q) y + y^T (p + p^T + q + q^T) y > 0 \quad (3.4.10)$$

となる。ここで, (3.4.10) 式の左辺第 1 項は, つぎのように変形される。

$$\begin{aligned} y^T (p^T s^{-1} p - q^T s^{-1} q) y &= \|py\|^2 - \|qy\|^2 \\ &= \left\{ \left(\frac{\|py\|}{\|y\|} \right)^2 - \left(\frac{\|qy\|}{\|y\|} \right)^2 \right\} \|y\|^2 \end{aligned} \quad (3.4.11)$$

(3.4.11) 式によって, p と q のスペクトル・ノルムがひとしければ (3

4 1 0) 式の左辺第 1 項は零となることがわかる。

従って, (3 4 1 0) 式は, このとき次の式になる。

$$y^T (p + p^T + q + q^T) y > 0 \quad (3.4.12)$$

この式は, p および q が共に正値行列であるための条件である。こゝでは又 (3 4 1 2) 式が行列 p および q が正値行列なるための定義式と考える。

行列 $\|(\rho_n L - V_1)(\rho_n W + V)^{-1}\|$ についても V_1 が正値対称なるとき同様な結果をうる。(3 3 3) 式で定まる加速行列 L と W はスペクトル・ノルムが互いにひとしい正値行列であるから, (3 4 1 1) 式が零なる条件と (3 4 1 2) 式を満足しているから, (3 4 6) 式の右辺は 1 より小である。故に

$$\lambda(T\rho_n) = \lambda(\widetilde{T\rho_n}) \leq \|\widetilde{T\rho_n}\| < 1 \quad (3.4.13)$$

が成立する。ここに次の定理をうる。

定理 3.4.1 (26), (39)

(3 3 1), (3 3 2) 式に従う ADIN 法は H_1 と V_1 が正値対称な実行列であり, L と W のスペクトル・ノルムがひとしく且正値行列なるときに収束する。

3.5 ADIN 法の収束率 (26a)(39)

前節の定理 3.4.1 によって, パラメーター行列 L, W のスペクトル・ノルムがひとしく, 且正値行列なるとき, この ADIN 法は収束することが証明された。ADIN 法の収束率を厳密に求めることは困難であるので, 本節においては, ADIN 法および ADI 法のスペクトル半径についての関係を近似的に求めて, この結果から ADIN 法の収束率を推定した。

今, ADIN 法について, $(H + \rho L)^{-1}(V - \rho L)$ の固有値を λ_H , $(V + \rho W)^{-1}(H - \rho W)$ の固有値を λ_V とする。又 ADI 法について, $(H + \rho I)^{-1}(V - \rho I)$ の固有値を σ_H とし, $(V + \rho I)^{-1} \times (H - \rho I)$ の固有値を σ_V とする。まづ λ_H と σ_H との関係について考える。

添字の便宜上, 考える領域を $2n \times 2n$ 格子点からなる正方形領域とする。格子点の番号は, 第 3.5.1 図に示すように, まづ一行おきに番号を与え, つ

ぎに残りの行の格子点の番号を続ける。このとき、 $2n \times 2n$ 格子点について H_1 と V_1 をかくと、(3.5.1) 式のようなになる

$$H_1 = \begin{bmatrix} H_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ & & H_{nn, n} \\ \hline & & & H_{n+1, n+1} \\ & & & \ddots \\ & & 0 & & H_{2n, 2n} \end{bmatrix}, \quad V_1 = \begin{bmatrix} V_{11} & & V_{1n} \\ & \ddots & \\ & & V_{nn, n} \\ \hline & & & V_{n+1, n+1} \\ & & & \ddots \\ & & V_{2n-1, n-1} & & V_{2n, 2n} \end{bmatrix}$$

ここに、

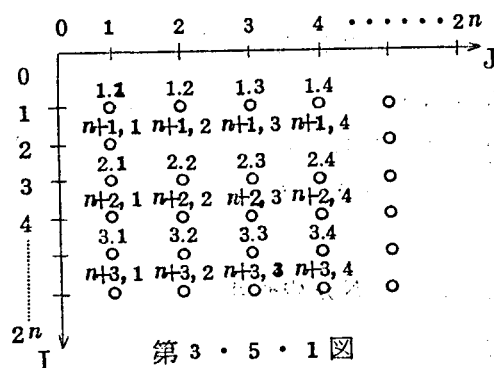
(3 · 5 · 1)

$$H_{11} = H_{22} = \cdots = H_{2n, 2n}$$

$$V_{i, i} = 2I, \quad V_{i, j} = -I$$

であって、 $H_{11}, H_{12}, \dots, V_{11}, V_{12}, \dots$ 等は $2n \times 2n$ の行列である。

(3.5.1) 式において破線で区切った、小行列を、 $\bar{H}_{11}, \bar{H}_{22}, \bar{V}_{12}$ および \bar{V}_{22} とすれば (3.5.1) 式はつぎのようなになる。



$$H_1 = \begin{bmatrix} \bar{H}_{11} & 0 \\ 0 & \bar{H}_{22} \end{bmatrix}, \quad V_1 = \begin{bmatrix} \bar{V}_{11}, \bar{V}_{12} \\ \bar{V}_{21}, \bar{V}_{22} \end{bmatrix} \quad (3.5.3)$$

(3.5.1) 式に従って、 L はつぎのようにかける。

$$L = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} V_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ & & V_{nn, n} \\ \hline & & & V_{n+1, n+1} \\ & & & \ddots \\ & & V_{2n-1, n-1} & & V_{2n, 2n} \end{bmatrix} \quad (3.5.4)$$

m を反復の計算回数を表わすものとし、 $m + \frac{1}{2}$ および m における誤差ベクト

を、それぞれ $\varepsilon^{(m+\frac{1}{2})}$ および $\varepsilon^{(m)}$ とする。

$\varepsilon^{(m)}$ が零でないとき, (3.31) 式から次の関係をうる。

$$\varepsilon^{(m+\frac{1}{2})} = (H_1 + \rho L)^{-1} (\rho L - V_1) \varepsilon^{(m)} = \lambda_H \varepsilon^{(m)} \quad (3.5.6)$$

このとき固有値 λ_H は、つぎの行列式から求まる

$$\det \{ \lambda H(H_1 + \rho L) - (\rho L - V_1) \} = 0 \quad (3.5.5)$$

(356)式は、(354)式によって、次のように書くことが出来る。

$$\begin{vmatrix} \lambda_{\text{H}}(\text{H}_{11} + \rho \text{I}) - (\rho - 2) \text{I} & V_{12} \\ \{ \lambda_{\frac{\rho}{2}} - (\frac{\rho}{2} - 1) \} V_{21} & \lambda_{\text{H}}(\text{H}_{22} + \rho \text{I}) - (\rho - 2) \text{I} \end{vmatrix} = 0$$

(3 5 7)

一方、ADI法において、水平方向の行列 $(H_1 + \rho I)^{-1} \times (\rho I - V_1)$ の固有値 σ_H は、次式を満足する値である。

$$\det \{ \sigma_H (H_1 + \rho I)^{-1} - (\rho I - V_1) \} = 0 \quad (3.58)$$

このときADIN法の(3.5.7)式には、次式が対応する。

$$\left| \begin{array}{cc} \sigma_{\overline{H}}(\overline{H}_{11} - \rho I) - (\rho - 2) I & \overline{V}_{12} \\ \overline{V}_{21} & \sigma_{\overline{H}}(\overline{H}_{22} + \rho I) - (\rho - 2) I \end{array} \right| = 0 \quad (3.5.9)$$

λ_H と σ_H の大きさを比較するため、一般に次の行列 A を考える

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & a_{m-2,m-1} & a_{m-1,m-1} & a_{m-1,m} & \\ & & 0 & a_{m,m-1} & a_{m,m} & \end{pmatrix} \quad (3.5.10)$$

ここに a_i , i は $r \times r$ 行列とする。今 $\Lambda \bar{U} = K$ なる方程式の解法として、次の二通りの方法について検討しよう。

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & & \\ 0 & a_{32} & a_{33} & 0 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{m,m-1} & a_{m,m} \end{bmatrix} U^{(n+1)} = K - \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & a_{m-1,m} & 0 \end{bmatrix} U^{(n)} \quad (3.5.11)$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & & \\ \vdots & 0 & a_{33} & 0 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a_{m,m} \end{bmatrix} U^{(n+1)} = K - \begin{bmatrix} 0 & a & 0 & \dots & 0 \\ a & 0 & a & & \\ 0 & a & 0 & a & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & a \\ 0 & \dots & \dots & a_{m,m-1} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.5.12)$$

(3.5.11) および (3.5.12) 式を、一般に、 $M U^{(n+1)} = K - N U^{(n)}$ と表わすとき、 $M^{-1}N$ は誤差収束行列である。(3.5.11) 式の誤差収束行列の固有値は、次の行列式を満足する λ の値である。

$$\begin{bmatrix} \lambda a_{11} & a_{12} & 0 & \dots & 0 \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & a_{23} & & \\ 0 & \lambda a_{32} & \lambda a_{33} & a_{34} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & a \\ 0 & \dots & 0 & \lambda a_{m,m-1} & \lambda a_{m,m} \end{bmatrix} = 0 \quad (3.5.13)$$

又、(3.5.12) 式の誤差収束行列の固有値 σ は次式を満足する。

$$\begin{bmatrix} \sigma a_{11} & a_{12} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & \sigma a_{22} & a_{23} & & \\ 0 & a_{32} & \sigma a_{33} & a_{34} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & a_{m-1,m} \\ 0 & \dots & 0 & a_{m,m-1} & \sigma a_{m,m} \end{bmatrix} = 0 \quad (3.5.14)$$

(3.5.13) 式から求まる λ の値は SOR 法で加速係数を 1 とした、ガウス

ザイデル法の固有値である。又(3.5.14)式から求まる σ の値はヤコビ法の固有値である。Arms, Gams および Zondek は S O R 法と加速係数の関係を求めている。(9) この結果から、

$$\lambda = \sigma^2 \quad (3.5.15)$$

なる関係が得られる。(3.5.8), (3.5.9)の両式において, ρ の値を2とすると、(3.5.8)式は 2×2 行列に対する、(3.5.11)式の形になり、(3.5.9)式は同様に、 2×2 行列に対する、(3.5.12)式の形になる。従って、ここでADIN法の固有値 λ_H と、ADI法の固有値 δ_H との間に(3.5.15)式と同様な関係が成立するものと近似する。(26a)(39)

$$\lambda_H \doteq \sigma_H^2 \quad (3.5.16)$$

(3.3.2)式による垂直方向の計算についても、水平方向の計算と同様な関係が成立するものと近似する。すなわち、この際の、ADIN法の収束行列の固有値を λ_v 、ADI法の収束の行列の固有値を σ_v とすると、次式が得られる。

$$\lambda_v \doteq \sigma_v^2 \quad (3.5.17)$$

ADIN法の水平、垂直—反復計算後の収束行列の固有値を $\lambda(T\rho)$ とし、ADI法のそれを $\sigma(T\rho')$ とすれば、それぞれ

$$\lambda(T\rho) = \lambda_H \lambda_v, \quad \sigma(T\rho') = \sigma_H \sigma_v \quad (3.5.18)$$

であるから、つぎの近似的関係が成立する。

$$\lambda(T\rho) = \lambda_H \lambda_v \doteq \sigma_H^2 \sigma_v^2 = \{ \sigma(T\rho') \}^2 \quad (3.5.19)$$

ADIN法の m 回の反復計算による平均収束率を $R_m \lambda$ 、ADI法のそれを $R_m \sigma$ とすれば、定義2.5.1によって、

$$R_m \lambda = -\frac{1}{m} \ln \{ \lambda(T\rho^m) \} \quad (3.5.20)$$

$$R_m \sigma = -\frac{1}{m} \ln \{ \sigma(T\rho'^m) \} \quad (3.5.21)$$

となる。ここに、(3.5.19)式の関係を用いると、

$$R_{m\lambda} \div 2 R_{m\sigma} \quad (3.5.22)$$

をうる。

次に(3.4.2)式のように、各反復毎に ρ_n の値を変化させる場合を考える。この場合も任意の n の値に対して(3.5.19)式が成立するとすれば、つぎのようになる。

$$\lambda(T_{\rho_n}) \div \{\sigma(T'_{\rho_n})\}^2 \quad (3.5.23)$$

従つて

$$\lambda\left(\prod_{n=1}^m T_{\rho_n}\right) \div \left\{\sigma\left(\prod_{n=1}^m T'_{\rho_n}\right)\right\}^2 \quad (3.5.24)$$

この場合、ADIN法の平均収束率は、

$$R_{m\lambda} = -\frac{1}{m} \ell_n \left(\lambda\left(\prod_{n=1}^m T_{\rho_n}\right) \right) \quad (3.5.25)$$

である。ADI法の平均収束率を $R_{m\sigma}$ とすれば、この場合も、

$$R_{m\lambda} \div 2 R_{m\sigma} \quad (3.5.26)$$

が成立する。(3.5.26)式からADIN法の平均収束率はADI法の平均収束率の約2倍になることが推定される。従つて、所要の解をうるために、必要な、ADIN法の繰返回数、ADI法の所要繰返回数の約2となる。

3.6 ADIN法のパラメーターの決定

ADIN法の収束行列の固有値を(3.5.13)、(3.5.18)式によつてADI法の自乗で近似すると、収束行列のスペクトル・ノルムは次式で与えられる。

$$\left\| \prod_{n=1}^m T_{\rho_n} \right\| = \max \left\{ \lambda \prod_{n=1}^m (T_{\rho_n}) \right\} \div \max \left\{ \sigma \prod_{n=1}^m (T'_{\rho_n}) \right\}^2 \quad (3.6.1)$$

この $\left\| \prod_{n=1}^m T_{\rho_n} \right\|$ の値を最小にするように、 ρ_n をえらばよい。従つて(3.6.1)式から $\max \left\{ \sigma \prod_{n=1}^m (T'_{\rho_n}) \right\}$ を最小ならしめる ρ_n の値を

ADIN法のパラメーターにとる。

ADI法のパラメーターの決定法としてはPeacemanの方法およびWachspressの方法がある。まず $\rho_n = \rho$ なる場合について、ラプラスの方程式を例として考える。(3.1.1)式において $\sigma = 0$, $p = 1$, $s = 0$ とし一辺1なる正方形領域と考えると、次のラプラスの方程式をうる。

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad 0 < x, y < 1 \quad (3.6.2)$$

(3.6.2)式を(3.6.3)式のデリクレの境界条件の下でとくことを考えよう。

$$u(x, y) = r(x, y); (x, y) \in \Gamma \quad (3.6.3)$$

分割数を, x, y 軸方向共に $N = 1/h$ とすると, (3.6.2)式は差分近似によって $(N-1)^2$ 個の未知数からなる $(N-1)^2$ 個の連立一次方程式となる。(3.6.2)式の解は調和関係であるから, 格子点 (i, j) におけるベクトル $\alpha^{(k, \ell)}$ の成分は次式で表すことが出来る。

$$\alpha_{i,j}^{(k, \ell)} = r_{k, \ell} \sin\left(\frac{k\pi i}{N}\right) \cdot \sin\left(\frac{\ell\pi j}{N}\right) \quad (3.6.4)$$

$$1 \leq i, j \leq N-1, \quad 1 \leq k, \ell \leq N-1$$

(3.1.3), (3.1.4)式に示した H と V との定義を用いると, $H\alpha^{(k, \ell)}$ および $V\alpha^{(k, \ell)}$ は $1 \leq k, \ell \leq N-1$ なるすべての k, ℓ に対して(3.6.5)式のようになる。

$$H\alpha^{(k, \ell)} = 2 \left\{ 1 - \cos\left(\frac{k\pi}{N}\right) \right\} \alpha^{(k, \ell)} = 4 \sin^2\left(\frac{k\pi}{2N}\right) \cdot \alpha^{(k, \ell)}$$

$$V\alpha^{(k, \ell)} = 2 \left\{ 1 - \cos\left(\frac{\ell\pi}{N}\right) \right\} \alpha^{(k, \ell)} = 4 \sin^2\left(\frac{\ell\pi}{2N}\right) \cdot \alpha^{(k, \ell)}$$

$$\text{但し, } 1 \leq k, \ell \leq N-1 \quad (3.6.5)$$

ADI法の収束行列は対称行列であるので次式が成立する。

$$T'_{\rho} \alpha^{(k, \ell)} = \left(\frac{\rho - 4 \sin^2 \left(\frac{\ell \pi}{2N} \right)}{\rho + 4 \sin^2 \left(\frac{\ell \pi}{2N} \right)} \right) \cdot \left(\frac{\rho - 4 \sin^2 \left(\frac{k \pi}{2N} \right)}{\rho + 4 \sin^2 \left(\frac{k \pi}{2N} \right)} \right) \alpha^{(k, \ell)} \quad (3.6.6)$$

T'_{ρ} のスペクトル半径 $\sigma(T'_{\rho})$ は定義によつて固有値の絶対値が最大なものである。こゝで $k = \ell$ とすると、

$$\sigma(T'_{\rho}) = \left\{ \max_{1 \leq \ell \leq N-1} \left| \frac{\rho - 4 \sin^2 \left(\frac{\ell \pi}{2N} \right)}{\rho + 4 \sin^2 \left(\frac{\ell \pi}{2N} \right)} \right| \right\}^2 \quad (3.6.7)$$

この $\sigma(T'_{\rho})$ の値を最小ならしめる ρ の値が最適値である。

このような ρ の値を求めるため、まづ次の関係を考えよう。

$$g_1(x; \rho) = \frac{\rho - x}{\rho + x}, \quad \rho > 0 \quad (3.6.8)$$

こゝに $0 < x_1 \leq x \leq x_2$ である。 $g_1(x; \rho)$ の微係数は $x \geq 0$ なるすべての x に対して負であるから $|g_1(x; \rho)|$ の最大値は x が x_1 か又 x_2 のときである。

すなわち

$$\max_{x_1 \leq x \leq x_2} |g_1(x; \rho)| = \max \left\{ \left| \frac{\rho - x_1}{\rho + x_1} \right|, \left| \frac{\rho - x_2}{\rho + x_2} \right| \right\}$$

これから、次の結果をうる（付録4参照）

$$\max_{x_1 \leq x \leq x_2} |g_1(x; \rho)| = \begin{cases} \frac{x_2 - \rho}{x_2 + \rho}, & 0 < \rho \leq \sqrt{x_1 x_2} \\ \frac{\rho - x_1}{\rho + x_1}, & \rho \geq \sqrt{x_1 x_2} \end{cases} \quad (3.6.9)$$

従つて

$$\min_{\rho > 0} \left\{ \max_{x_1 \leq x \leq x_2} |g_1(x; \rho)| \right\} = g_1(x; \sqrt{x_1 x_2})$$

$$= \frac{\sqrt{x_1 x_2 - x_1}}{\sqrt{x_1 x_2 + x_1}} = \frac{1 - (x_1 / x_2)^{\frac{1}{2}}}{1 + (x_1 / x_2)^{\frac{1}{2}}} \quad (3.610)$$

(3.67) の $\sigma(T_{\rho'})$ の場合には

$$x_1 = 4 \sin^2 \left(\frac{\pi}{2N} \right), \quad x_2 = 4 \sin^2 \left(\frac{\pi(N-1)}{2N} \right) = 4 \cos^2 \left(\frac{\pi}{2N} \right) \quad (3.611)$$

であるから $\hat{\rho} = \sqrt{x_1 x_2} = 4 \sin \left(\frac{\pi}{2N} \right) \cos \frac{\pi}{2N}$ である。

従って

$$\min_{\rho > 0} \sigma(T_{\rho'}) = \sigma(T_{\hat{\rho}}) = \left(\frac{1 - \tan \left(\frac{\pi}{2N} \right)}{1 + \tan \left(\frac{\pi}{2N} \right)} \right)^2 \quad (3.612)$$

となる。

(3.612) 式の結果を用いると、(3.61) 式から $\lambda(T_{\rho})$ の最小値が求まる。

$$\min_{\rho > 0} \lambda(T_{\rho}) = \lambda(T_{\rho}) \div \left(\frac{1 - \tan(\pi/2N)}{1 + \tan(\pi/2N)} \right)^4 \quad (3.613)$$

(3.612) 式の結果は point SOR の最適加速係数に対するスペクトル半径の値とひとしい。(3.613) 式からパラメーターを1個とした場合の ADIN 法のスペクトル半径は point SOR のスペクトル半径の自乗で近似出来ることがわかる。

次に ρ の値を1回の繰返し計算毎に変化させる場合を考える。

$\rho_n = \{\rho_n\}, n=1, 2, \dots, m$ に対して $\max \{ \lambda \prod_{n=1}^m (T_{\rho_n}) \}$ の値は (3.61) の近似が成立するものとする。従って今

$$\max \{ \sigma \prod_{n=1}^m (T'_{\rho_n}) \}$$

の値を最小ならしめる問題を考える。 H_1 と V_1 が可換であるときは

$\sigma \prod_{n=1}^m (T_{\rho'_n})$ のノルムについて次の定理が成立する。

(定理 3.6.1) (17)

H_1 と V_1 が $H_1 V_1 = V_1 H_1$ なる関係を満足し、エルミートな $n \times n$ 正値行列とする。このとき $\{\rho_n\}_{n=1}^m$ が正の数からなる任意の数列であれば次式が成立する。

$$\begin{aligned} \left\| \prod_{n=1}^m T_{\rho'_n} \right\| &= \sigma \left(\prod_{n=1}^m T_{\rho'_n} \right) = \max_{1 \leq n \leq m} \prod_{n=1}^m \left| \frac{\rho_n - \mu_n}{\rho_n + \mu_n} \right| \\ &\quad \cdot \left| \frac{\rho_n - \nu_n}{\rho_n + \nu_n} \right| < 1 \end{aligned} \quad (3.6.14)$$

ここに μ_n, ν_n はそれぞれ H_1 と V_1 の固有値である。

更にもし $\rho_{n+1} > 0$ ならば、

$$\left\| \prod_{n=1}^{m+1} T_{\rho_n} \right\| < \left\| \prod_{n=1}^m T_{\rho_n} \right\| < 1 \quad (3.6.15)$$

H_1 か V_1 の何れか一つの固有値がすべて分ると $\left\| \prod_{n=1}^m T_{s_j} \right\| = 0$ なる

$\{S_j\}_{j=1}^n$ をえらぶことが出来て直接解くことができる。

しかしながら H_1 と V_1 の固有値をあらかじめ知ることは、一般に不可能だから、もっと実際の ρ_n の決定法を考える。

今 H_1 および V_1 の固有値 μ_j および ν_j が、 $0 < \alpha \leq \mu_j, \nu_j \leq \beta$ なる範囲で、 $1 \leq j \leq n$ に対して定められるとき次の関係が成立つ

$$\begin{aligned} &\max_{1 \leq i \leq n} \prod_{j=1}^m \left| \frac{\rho_j - \nu_i}{\rho_j + \mu_i} \right| \left| \frac{\rho_i - \nu_i}{\rho_j + \nu_i} \right| \\ &\leq \left\{ \max_{1 \leq i \leq n} \prod_{j=i}^m \left| \frac{\rho_j - \mu_i}{\rho_j + \mu_i} \right| \right\} \left\{ \max_{1 \leq i \leq n} \prod_{j=1}^m \left| \frac{\rho_j - \nu_i}{\rho_j + \nu_i} \right| \right\} \\ &\leq \left\{ \max_{\alpha \leq x \leq \beta} \prod_{j=1}^m \left| \frac{\rho_j - x}{\rho_j + x} \right| \right\}^2 \end{aligned} \quad (3.6.16)$$

故に

$$\left\| \prod_{j=1}^m T_{\rho_j} \right\| \leq \left\{ \max_{\alpha \leq x \leq \beta} |\vartheta_m(x; \rho_j)| \right\} \quad (3.617)$$

ここに,

$$\vartheta_m(x; \rho_j) \equiv \prod_{j=1}^m \frac{\rho_j - x}{\rho_j + x} \quad (3.618)$$

前と同様に (3.7.16) 式左辺の関数を最小ならしめるために, 次の関数 $d_m(\alpha, \beta)$ を考える。

$$d_m(\alpha, \beta) = \min_{\vartheta_m \in S_m} \left\{ \max_{\alpha \leq x \leq \beta} |\vartheta_m(x; \rho_j)| \right\} \quad (3.619)$$

S_m は $\vartheta_m(x; \rho_j)$ の系列とし, $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$ は正の常数である。この問題の解は Wachspress によって, $m = 2k$, $k > 0$ なる場合について解かれている (24)

[定理 3.6.2]

次式で定まる, 関数 $\vartheta_m(x; \tilde{\rho}_j) \in S_m$ が存在する。

$$d_m(\alpha, \beta) = \max_{\alpha \leq x \leq \beta} |\vartheta_m(x; \tilde{\rho}_j)| \quad (3.620)$$

ここで, $\tilde{\rho}_j$ は $0 < \alpha < \tilde{\rho}_j < \beta$, $1 \leq j \leq m$ なる範囲の常数である。

x_i を $\alpha = x_1 < x_2 < \dots < x_{m+1} = \beta$ としたとき, $\vartheta_m(x; \bigwedge \rho_i)$ は $m+1$ 個の点 x_i に於て, 絶対値 $d_m(\alpha, \beta)$ をとり, 符号は交互に変化する関数である。前述したように, 加速パラメータ ρ が一つのときの関数 $\vartheta_1(x; \rho)$ を最小にするには

$$\tilde{\rho} = \sqrt{\alpha \beta}$$

とえらばよい。この際は

$$\vartheta_1(\alpha, \tilde{\rho}) = -\vartheta_1(\beta, \tilde{\rho}) = d_1(\alpha, \beta) \quad (3.621)$$

となる。 $m > 1$ なるときに (3.619) 式を最小にする $\tilde{\rho}_1, \tilde{\rho}_2, \dots, \tilde{\rho}_m$

を α と β の関数として表す一般式は未だ発見されていない。しかしながら、この問題に対して、 $m = 2^k$, $k > 0$ なる場合は比較的簡単に解をうることができる。

系。 $\tilde{\rho}_1 \tilde{\rho}_2 \cdots \tilde{\rho}_n$ を (3.6.20) 式の最大値最小化問題を解くパラメータの系列とする。もし $\tilde{\rho}_j$ がこの系列の一つの値であるならば、 $\alpha\beta/\tilde{\rho}_j$ もこの系列中の値である。

従って次の式が成立する。

$$g_m(x; \tilde{\rho}_j) = g_m\left(\frac{\alpha\beta}{x}, \tilde{\rho}_j\right) \quad (3.6.22)$$

$m = 1$ のときに、この系を適用するとパラメータ ρ_1 は

$$\tilde{\rho}_1 = \alpha\beta / \rho_1$$

なる関係を満足しなければならない。従って $\tilde{\rho}_1 = \sqrt{\alpha\beta}$ となり前と同様な結果をうる。

次にパラメータの数が $2m$ なるときを考える。

$\tilde{\rho}_1 < \tilde{\rho}_2 < \cdots < \tilde{\rho}_{2m}$ を (3.6.20) 式を満足するパラメータとする上の系を用いると、

$$\begin{aligned} d_{2m}(\alpha, \beta) &= \max_{\alpha \leq x \leq \beta} \left| \prod_{j=1}^{2m} \left(\frac{\tilde{\rho}_j - x}{\tilde{\rho}_j + x} \right) \right| \\ &= \max_{\alpha \leq x \leq \beta} \left| \prod_{j=1}^m \left(\frac{\tilde{\rho}_j - x}{\tilde{\rho}_j + x} \right) \left(\frac{\alpha\beta/\tilde{\rho}_j - x}{\alpha\beta/\tilde{\rho}_j + x} \right) \right| \quad (3.6.23) \end{aligned}$$

更に、右辺の掛算を行い $2x$ でわると

$$d_{2m}(\alpha, \beta) = \max_{\alpha \leq x \leq \alpha\beta} \alpha\beta \left| \prod_{j=1}^m \left(\frac{\frac{\sqrt{\alpha\beta}}{2} \left(\frac{\sqrt{\alpha\beta}}{x} + \frac{x}{\sqrt{\alpha\beta}} \right) - \frac{1}{2} \left(\tilde{\rho}_j + \frac{\alpha\beta}{\tilde{\rho}_j} \right)}{\frac{\sqrt{\alpha\beta}}{2} \left(\frac{\sqrt{\alpha\beta}}{x} + \frac{x}{\sqrt{\alpha\beta}} \right) + \frac{1}{2} \left(\tilde{\rho}_j + \frac{\alpha\beta}{\tilde{\rho}_j} \right)} \right) \right| \quad (3.6.24)$$

(3.6.22) 式中において

$$y = \frac{\sqrt{\alpha\beta}}{2} \left(\frac{\sqrt{\alpha\beta}}{x} + \frac{x}{\sqrt{\alpha\beta}} \right); \quad \widetilde{S}_j = \frac{1}{2} \left(\rho_j + \frac{\alpha\beta}{\rho_j} \right) \quad (3.6.25)$$

とおくと次式をうる。

$$d_{2m}(\alpha, \beta) = \max_{\sqrt{\alpha\beta} \leq y \leq (\alpha+\beta)/2} \left| \prod_{j=1}^m \left(\frac{y - \widetilde{S}_j}{y + S_j} \right) \right|$$

$$\geq d_m \left[\sqrt{\alpha\beta}, \frac{\alpha+\beta}{2} \right] \quad (3.6.26)$$

(3.6.26) 式の中央の項は y の範囲が $\sqrt{\alpha\beta} \leq y \leq (\alpha+\beta)/2$ なるときの $\vartheta_m(y; S_j)$ であって、その最大値の絶対値は上の区間内における $(m+1)$ 個の点 y_j において、 $d_{2m}(\alpha, \beta)$ である。ここで定理(3.6.2)によって(3.6.24)式の不等号は除かれる。

$$d_{2m}(\alpha, \beta) = \max_{\sqrt{\alpha\beta} \leq y \leq (\alpha+\beta)/2} |\vartheta_m(y; \widetilde{S}_j)|$$

$$= d_m \left[\sqrt{\alpha\beta}, \frac{\alpha+\beta}{2} \right] \quad (3.6.27)$$

\widetilde{S}_j の仮定から、区間 $\sqrt{\alpha\beta} \leq x \leq (\alpha+\beta)/2$ に対して m 個の最適パラメータ S_j を決定することが出来るから、(3.6.23)式を使えば、区間 $\alpha < x < \beta$ に対する $2m$ 個の最適パラメータ $\widetilde{\rho}_j$ を決定することが出来る。
今 $0 < \alpha < \beta$ とすると

$$\alpha_0 = \alpha, \quad \beta_0 = \beta$$

$$\alpha_{i+1} = \sqrt{\alpha_i \beta_i}, \quad \beta_{i+1} = \frac{\alpha_i + \beta_i}{2}, \quad i \geq 0 \quad (3.6.28)$$

であるから(3.6.25)を繰返し使用することによって

$$d_2^k(\alpha, \beta) = d_2^{k-1}(\alpha_1, \beta_1) = \dots \dots \dots$$

$$= d_2^0 = d_2(\alpha_k, \beta_k) \quad (3.6.29)$$

となる。(3.6.29)式によつて、区間 $\alpha \leq x \leq \beta$ に対する 2^k 個の最適パラメーターを見出す問題は区間 $\alpha_k \leq x \leq \beta_k$ に対する最適パラメーター $\sqrt{\alpha_k \beta_k}$ を見出す問題に還元できる。
更に定理 3.6.2 を用いると次の関係をうる。

$$d_1(\alpha_k, \beta_k) = g_1(\alpha_k, \sqrt{\alpha_k \beta_k})$$

$$d_{2^k}(\alpha, \beta) = \frac{\sqrt{\beta_k} - \sqrt{\alpha_k}}{\sqrt{\beta_k} + \sqrt{\alpha_k}} \quad k \geq 0 \quad (3.6.30)$$

このようにして 2^k 個のパラメーターに対しては、厳密解がえられる。しかしこのパラメーターの決定法は相当の演算を必要とするので、Peaceman および Rachford はつぎのようにパラメーターをえらんだ。

H_1 および V_1 の固有値をそれぞれ μ および ν とし、 μ, ν の値の範囲を $\alpha \leq \mu, \nu \leq \beta$ とする。

P. R. パラメーターを $\rho_i(p)$ とすると

$$\rho_i(p) = \beta \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^{(2i-1)/2m}, \quad i = 1, 2, \dots, m, m \geq 2 \quad (3.6.31)$$

である。一方 Wackspress のパラメーター $\rho_i(w)$ は

$$\rho_i(w) = \beta \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^{(i-1)/(m-1)}, \quad m \geq 2, i = 1, 2, \dots, m, m \geq 2 \quad (3.6.32)$$

で与えられる。

まづ $\rho_i(p)$ の決定についてのべる。Peaceman - Rachford パラメーターによる、平均収束率 R_m は

$$R_m = -\frac{1}{m} \log \left\| \prod_{j=1}^m T \rho_j \right\| \quad (3.6.33)$$

で与えられる。(3.6.17)式と(3.6.20)式とから

$$\left\| \prod_{j=1}^m T_j' \right\| \leq (d_m(\alpha, \beta))^2 \quad (3.6.34)$$

であるから

$$R_m \geq \bar{R}_m = -\frac{2}{m} \log (d_m(\alpha, \beta)) \quad (3.6.35)$$

である。これから次の定理をうる。

定理 3.6.3

(3.6.31) 式によってパラメーターが得られたとき, m の値を一定とすると, スペクトル半径は次式で定まる。

$$\| \prod_{j=1}^m T \rho_j' \| \leq [d_m(\alpha, \beta)]^2 \leq \delta^2 \quad (3.6.36)$$

ここに

$$\delta = \frac{1-z}{1+z}, \quad z = O \frac{1}{2m}, \quad O = \frac{\alpha}{\beta} \quad (3.6.37)$$

である。更に $O \rightarrow 0$ となるとき次式が成立する。

$$R_m \geq \bar{R}_m = \frac{4}{m} z + O(z^2) \quad (3.6.38)$$

(証明)

(3.6.18) 及び (3.6.20) 式から

$$d_m(\alpha, \beta) = \max_{\alpha \leq x \leq \beta} \left| \prod_{j=1}^m \left(\frac{r_j - x}{r_j + x} \right) \right| \quad (3.6.39)$$

(3.6.31) 式から

$$\rho_j^{(p)} = \beta Z^{i-1}, \quad Z = \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^{\frac{1}{2m}}, \quad 1 \leq i \leq m$$

(3.6.39) 式の右辺の各項は, 1 より小であるから, 今 r を区間 $(\alpha, \alpha Z)$ 又は区間 $(\beta Z^{-1}, \beta)$ 又は区間 (ρ_{i-1}, ρ_i) 内の任意の数とすると, 次式が成立する。

$$0 \leq (r - \alpha) / (r + \alpha) \leq (1 + Z) / (1 + Z)$$

$$0 \leq (\beta - r) / (\beta + r) \leq (1 + Z) / (1 + Z)$$

更に

$$\left| \frac{\gamma - \rho_{i-1}}{\gamma + \rho_{i-1}} \cdot \frac{\rho_i - \gamma}{\rho_i + \gamma} \right|$$

について考えると、 $\mu = \gamma / \rho_{i-1}$ とおくと

$$0 \leq \left| \frac{\gamma - \rho_{i-1}}{\gamma + \rho_{i-1}} \cdot \frac{\rho_i - \gamma}{\rho_i + \gamma} \right| \leq \max_{Z^2 \leq x \leq 1} \left| \frac{\mu - 1}{\mu + 1} \cdot \frac{Z^2 - \mu}{Z^2 + \mu} \right|$$

上式の右辺は、 $x = Z$ なるとき最大となるので、

$$0 \leq \left| \frac{\gamma - \rho_{i-1}}{\gamma + \rho_{i-1}} \cdot \frac{\rho_i - \gamma}{\rho_i + \gamma} \right| \leq \left| \frac{Z-1}{Z+1} \right|^2$$

これらの不等式から (3.6.3.6) 式がえられる。

次に、(3.6.3.5)、(3.6.3.6)、及び(3.6.3.8)式から

$$\bar{R}_m > -\frac{2}{m} \log \delta = -\frac{4}{m} Z + O(Z^2) \quad (3.6.4.0)$$

他方、(3.6.3.1)、(3.6.3.5)及び(3.6.3.9)から

$$\begin{aligned} \bar{R}_m &\leq -\frac{2}{m} \log \prod_{i=1}^m \frac{b - \rho_i}{b + \rho_i} \\ &= -\frac{2}{m} \log \prod_{i=1}^m \frac{1 - z^{2i-1}}{1 + z^{2i-1}} = -\frac{4}{m} z + o(z^2) \end{aligned} \quad (3.6.4.1)$$

(3.6.3.8)式は(3.6.4.0)及び(3.6.4.1)式から得られる。

(証明終)

(3.6.3.3)および(3.6.3.6)式から平均収束率 $\bar{R}_m^{(p)}$ を

$$\bar{R}_m^{(p)} = -\frac{2}{m} \log \delta \quad (3.6.4.2)$$

で近似すると、このときつぎの関係をうる。

$$R_m \geq \bar{R}_m \geq \bar{R}_m^{(p)} \quad (3.6.4.3)$$

(3.6.3.7) 式を m についてとき, (3.6.4.2) 式を最大ならしめる δ の値を求めると

$$\delta = \sqrt{2} - 1 \div 0.414 \quad (3.6.4.4)$$

をうる。このとき $R_m^{(p)}$ の値はつぎのようになる。

$$R_m^{(p)} = \frac{4(\log \bar{\delta})^2}{-\log C} \div \frac{3.11}{-\log C} \quad (3.6.4.5)$$

実際に $\rho_i^{(p)}$ を決定する手順を次に示す。

(1) α と β を推定して, $C = \alpha / \beta$ を計算する。

(2) $(\bar{\delta})^{\frac{2}{m}} \leq C \quad (3.6.4.1)$

を満足する m の最小整数値を求める。

ここに $\bar{\delta} = \sqrt{2} - 1 \div 0.414$ である。

(3) (3.6.3.1) 式によって $\rho_i^{(p)}$ を決定する。

(4) このときの平均収束率は

$$R_m^{(p)} = -\frac{2}{m} \log \delta$$

ここに

$$\delta = \frac{1 - Z}{1 + Z}$$

である。

次に (3.6.3.2) 式の Wachspress のパラメーターの決定についてのべる。これに関してはつぎの定理がある。

定理 3.6.4

(3.6.2.2) 式によってパラメーターが与えられたとき, m の値を一定とするとスペクトル半径は次式で定まる。

$$A\left(\prod_{i=1}^m T_{\rho_i}\right) \leq (d_m(\alpha, \beta))^2 \leq \varepsilon \quad (3.6.4.7)$$

ここに,

$$\epsilon = \left(\frac{1-y}{1+y} \right)^2 \quad (3.648)$$

$$y = C^{1/(2m-1)} \quad (3.649)$$

更に $C \rightarrow 0$ なるとき、つぎの関係をうる。

$$\bar{R}_m \geq \bar{R}_m = \frac{8}{m} y + O(y^2) \quad (3.650)$$

(証明略)

m の値を決定するために平均収束率を次式で近似する。

$$\bar{R}_m^{(w)} = -\frac{2}{m} \log \epsilon \quad (3.651)$$

(3.633) と (3.647) 式を用いると次の関係が求まる。

$$\bar{R}_m \geq \bar{R}_m \geq \bar{R}_m^{(w)} \quad (3.652)$$

(3.644) 式と同様に考えて、 \bar{R}_m を最大ならしめる ξ の値 $\bar{\xi}$ はつぎのようになる。

$$\bar{\epsilon} = \delta^2 = (\sqrt{2} - 1)^2 \div 0.172 \quad (3.653)$$

実際に $\rho_i^{(w)}$ を決定する手順をつぎに示す。

- (1) α と β を推定して $C = \alpha / \beta$ を計算する。
- (2) 次式を満足する m の最小整数値を求める。

$$\bar{\delta}^2 \binom{2m-1}{\delta^2} \leq 0 \quad (3.651)$$

こゝに、 $\bar{\delta} = \sqrt{2} - 1 = 0.414$ である。

- (3) (3.632) 式によって $\rho_i^{(w)}$ の値を求める。
- (4) 平均収束率の近似値は次式で与えられる

$$\bar{R}_m^{(w)} = -\frac{2}{m} \log \epsilon \quad (3.652)$$

こゝに

$$\epsilon = \left(\frac{1 - C \frac{1}{2(m-1)}}{1 + C \frac{1}{2(m-1)}} \right)^2 \quad \text{を表す}$$

定理 3.6.3 および 定理 3.6.4 から Wachspress のパラメータは ADI 法において, Peaceman - Rachford のパラメータを用いた場合の 2 倍の収束率を与える。

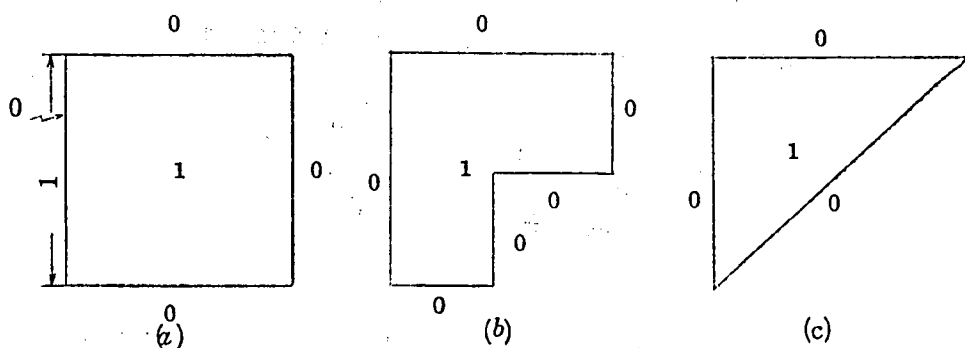
(26), (39)

3.7 数値計算例

本節ではラプラスの方程式の境界値問題に対する ADIN 法の数値計算例についてのべる。x, y 方向の格子間隔は共にひとしく h とする。

そして, h が一辺の $\frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{20}$ および $\frac{1}{40}$ の場合について計算し

ここで境界値はすべて零とし, 初期値はすべて 1 とした。すなわち第 3.7.1(a), (b), (c) 図のようにする。このように初期値を与えると, 計算途中における格子点の値はそのときの残差を表わすことになる。収束判定値は各点において 10^{-6} とした。パラメータは Peaceman - Rachford パラメータ Wachspress パラメータおよび最適パラメータ⁽²⁴²⁵⁾を用いた。ADI N 法による計算結果は同じパラメータを用いた ADI 法による計算結果



第 3.7.1 図 例題として選んだ領域

と比較した。ADIN法の計算はすべて京都大学電子計算機KDC-IIを用い、FORTRANプログラムによって行なった。ADI法の計算結果はすでに得られている結果を引用した。⁽²⁵⁾ なお引用したものの一部はNEAC-2101によって計算し、結果を確認した。

次にADIN法の計算プログラムについて述べる。

ADIN法の基本式は(3.3.1), (3.3.2)式である。

$$(H_1 + \rho L) U_{n+\frac{1}{2}} = K - (V_1 - \rho L) U_n \quad (3.3.1)$$

$$(V_1 + \rho W) U_{n+1} = K - (H_1 - \rho W) U_{n+\frac{1}{2}} \quad (3.3.2)$$

簡単のために $h = \frac{1}{5}$ の場合を例にとって説明する。

第5.7.2図に示すように単位正方領域を格子で掩い、

い、 x, y 軸をそれぞれ J, I 軸に対応させる。

各格子点における U の値を $U_{i,j}$ とする。今ベクトル U の要素を偶数行群、奇数行群の順序にとつ

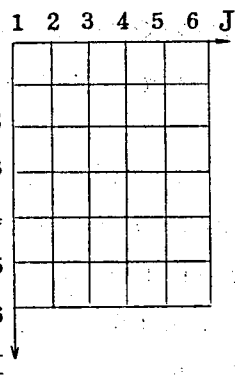
て、 $\bar{u}_{2j}, \bar{u}_{4j}, \bar{u}_{3j}, \bar{u}_{5j} \quad (j=2 \sim 5)$ と

する。(3.3.1), (3.3.2) 式をラプラスの方

程式を近似するものとする、これらの式はつぎのように書ける。

$$\left\{ \begin{bmatrix} H_2 & & 0 \\ & H_4 & \\ 0 & & H_3 & H_5 \end{bmatrix} + \rho \begin{bmatrix} I & & 0 \\ & I & \\ \frac{1}{2}I & -\frac{1}{2}I & I \\ & -\frac{1}{2}I & I \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \bar{U}_{2,j} \\ \bar{U}_{4,j} \\ \bar{U}_{3,j} \\ \bar{U}_{5,j} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} K_2 \\ K_4 \\ K_3 \\ K_5 \end{bmatrix} - \left\{ \begin{bmatrix} 2I & & -I \\ & 2I & -I & -I \\ -I & -I & 2I & \\ & -I & & 2I \end{bmatrix} - \rho \begin{bmatrix} I & & 0 \\ & I & \\ \frac{1}{2}I & -\frac{1}{2}I & I \\ & -\frac{1}{2}I & I \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \bar{U}_{ij} \\ \bar{U}_{ij} \\ \bar{U}_{ij} \\ \bar{U}_{ij} \end{bmatrix} \quad (3.7.1)$$



ここで

$$H_{i=2,3,4,5} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$K_{i=2,3,4,5} = [0], \quad u_{i,j} = \begin{bmatrix} u_{i,2} \\ u_{i,3} \\ u_{i,4} \\ u_{i,5} \end{bmatrix} \quad i=2,3,4,5$$

である。(3.7.1)式は(3.3.1)式に対応している。

ベクトル \bar{U} を

$$\bar{U} = \begin{bmatrix} u_{i,2} \\ u_{i,4} \\ u_{i,3} \\ u_{i,5} \end{bmatrix}$$

として、(3.3.2)式を書くと、(3.7.1)式中の H を V とした式が得られ同じ形となる。

$$\left\{ \begin{bmatrix} V_2 \\ V_4 \\ V_3 \\ V_5 \end{bmatrix} + \rho \begin{bmatrix} I & & & \\ & I & & \\ -\frac{1}{2}I & -\frac{1}{2}I & I & \\ & -\frac{1}{2}I & & I \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} u_{i,2} \\ u_{i,4} \\ u_{i,3} \\ u_{i,5} \end{bmatrix} \quad (3.7.2)$$

$$= - \left\{ \begin{bmatrix} 2I & & -I & \\ & 2I & -I & -I \\ -I & -I & 2I & \\ & -I & & 2I \end{bmatrix} - \rho \begin{bmatrix} I & & & \\ & I & & \\ -\frac{1}{2}I & -\frac{1}{2}I & I & \\ & -\frac{1}{2}I & & I \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} u_{i,2} \\ u_{i,4} \\ u_{i,3} \\ u_{i,5} \end{bmatrix} \quad (3.7.2)$$

但し

$$V_{j=2, 3, 4, 5} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, u_{i, j} = \begin{bmatrix} u_{2, j} \\ u_{4, j} \\ u_{3, j} \\ u_{5, j} \end{bmatrix} \quad j=2, 4, 3, 5$$

である。

(3, 7, 1), (3, 7, 2)を各行の任意の $u_{i, j}$ について表すとつぎの式となる。

偶数行

$$\begin{aligned} & (2+\rho) u_{i, j}^{(m+\frac{1}{2})} - u_{i, j+1}^{(m+\frac{1}{2})} - u_{i, j-1}^{(m+\frac{1}{2})} \\ & = -(2-\rho) u_{i, j}^{(m)} + u_{i+1, j}^{(m)} + u_{i-1, j}^{(m)} \end{aligned} \quad (3, 7, 3 a)$$

奇数行

$$\begin{aligned} & (2+\rho) u_{i, j}^{(m+\frac{1}{2})} - u_{i, j-1}^{(m+\frac{1}{2})} - u_{i, j+1}^{(m+\frac{1}{2})} \\ & = \frac{\rho}{2} (u_{i+1, j}^{(m+\frac{1}{2})} + u_{i-1, j}^{(m+\frac{1}{2})}) - (2-\rho) u_{i, j}^{(m)} \\ & + (1 - \frac{\rho}{2}) (u_{i+1, j}^{(m)} + u_{i-1, j}^{(m)}) \end{aligned} \quad (3, 7, 3 b)$$

偶数列

$$\begin{aligned} & (2+\rho) u_{i, j}^{(m+1)} - u_{i+1, j}^{(m+1)} - u_{i-1, j}^{(m+1)} \\ & = -(2-\rho) u_{i, j}^{(m+\frac{1}{2})} + u_{i, j+1}^{(m+\frac{1}{2})} + u_{i, j-1}^{(m+\frac{1}{2})} \end{aligned} \quad (3, 7, 3 c)$$

奇数列

$$(2+\rho) u_{i, j}^{(m+1)} - u_{i+1, j}^{(m+1)} - u_{i-1, j}^{(m+1)} = \frac{\rho}{2} (u_{i, j+1}^{(m+1)} + u_{i, j-1}^{(m+1)})$$

$$-(2-\rho) u_{i,j}^{(m+\frac{1}{2})} + (1-\frac{\rho}{2}) (u_{i,j+1}^{(m+\frac{1}{2})} + u_{i,j-1}^{(m+\frac{1}{2})}) \quad (3.7.3d)$$

(3.7.1), (3.7.2) 式から分るように, 両式の左辺のベクトル U にかかる行列は reducible となる。従って (3.7.3) の各式に表れる項は, 計算に際してはすべて常数項として扱われる。このため, (3.7.1), (3.7.2) 式の左辺を計算するには (3.7.3) 式からよくわかるように, 次の三項方程式をとけばよいことになる。

$$-u_{i-1} + \vartheta u_i - u_{i+1} = d_i \quad (3.7.4)$$

ここで, $\vartheta = (2+\rho)$, d_i は (3.7.1), (3.7.2), (3.7.3) 式の右辺を表す常数項である。(3.7.1), (3.7.2) 式の H_i, V_j なる小行列を境界点も含めて作ると

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & -1 & 2 & -1 & & \\ & & -1 & 2 & -1 & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

となるから, 今 (3.7.4) 式からなる次の行列を考える。

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & d_1 \\ -1 & \vartheta & -1 & & & d_2 \\ & -1 & \vartheta & -1 & & d_3 \\ & & -1 & \vartheta & -1 & d_4 \\ & & & -1 & \vartheta & -1 & d_5 \\ & & & & 1 & d_6 \end{bmatrix} \quad (3.7.5)$$

ここで $d_1 = d_2 = 0$ である。

$$\begin{aligned} h_i &= -1 / (\vartheta + h_{i-1}) \\ d'_i &= -h_i(d_i + d'_{i-1}) \end{aligned} \quad (3.7.6)$$

たとえば(3, 7, 5)は(3, 7, 7)式のように変形される。

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & d_1' \\ & 1 & h_2 & & & d_2' \\ & & 1 & h_3 & & d_3' \\ & & & 1 & h_4 & d_4' \\ & & & & 1 & d_5' \\ & & & & & 1 & d_6' \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} h_1 &= 0 \\ d_1' &= d_1 \\ d_6' &= d_6 \end{aligned} \quad (3, 7, 7)$$

(3, 7, 7)式から小行列Uの各要素は直ちに求まる。以上は $h = 1/5$ のときについてのべたが、この方法は $h = 1/N$ のときも同様に適用できる。

ADIN法のフローチャートを第3, 7, 3図に示した。

図中の記号はつぎのとおりである。

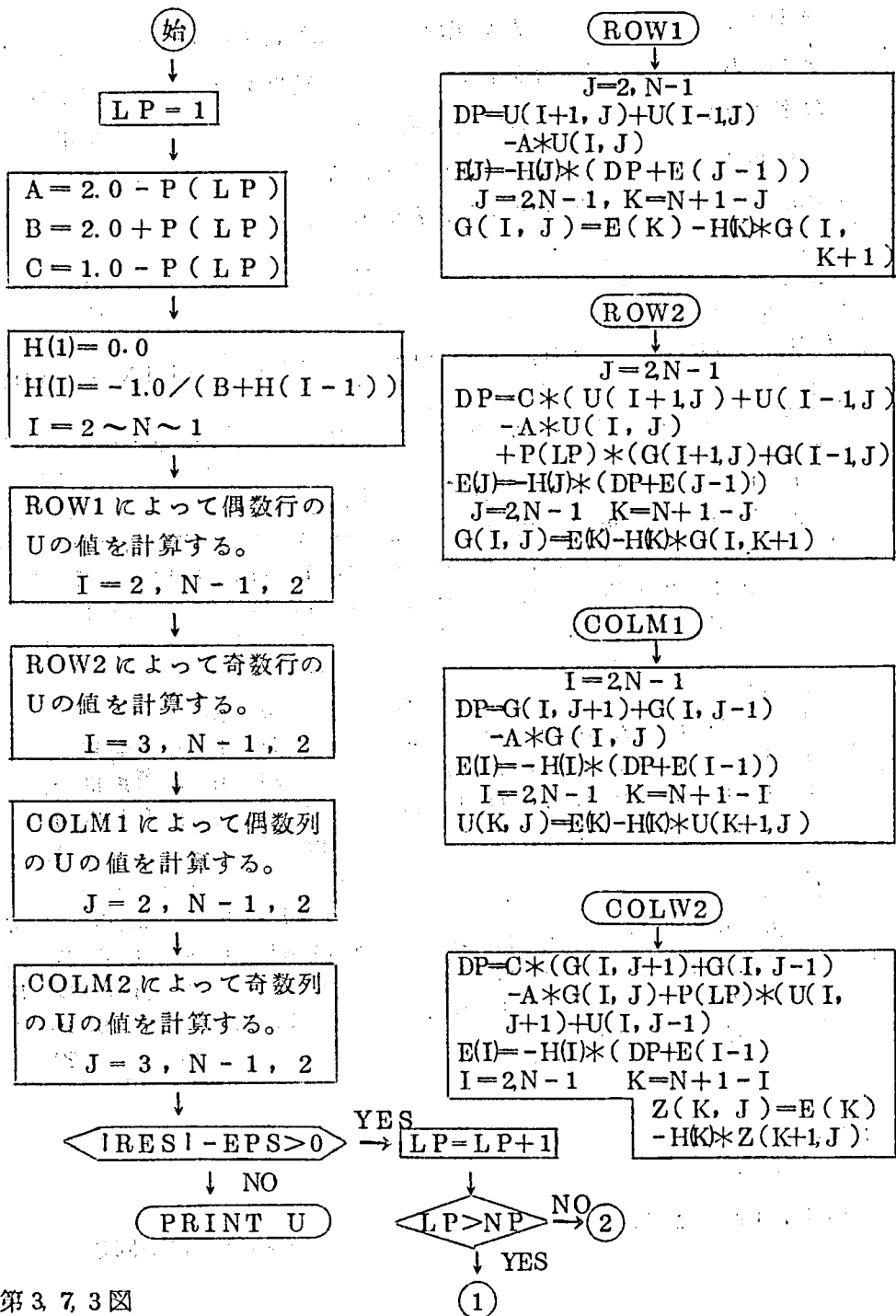
$H(I) = h_i$, LP: パラメーターの番号

$E(I) = d_i'$, NP: パラメーターの個数

$G = U^{m+1/2}$

DP = d_i

KDC-Iに対するFortran プログラムは付録5に示した。



第 3.7.3 図

ADIN 格のフローチャート

ADI法によって計算した結果は文献(25)のものをとり、ADIN法では $\frac{1}{h}=1.0, 2.0, 4.0$ の場合を計算した。この結果を第3.7.1表に示す。表中の数字は計算回数を示す。収束判定値は 10^{-6} とした。計算に用いた Peaceman - Rachford パラメーター, Wachspress パラメーターおよび最適パラメーターの値は第3.7.2表に示した。

領域		(a)				(b)				(c)			
方法		ADIN		ADI		ADIN		ADI		ADIN		ADI	
N	m	P W OP		P W OP		P W OP		P W OP		P W OP		P W OP	
10	1	14	14	23	23	11	11	17	17	12	12	16	16
	2	10	17	12	16	18	12	10	24	12	12	20	10
	3	8	12	9	15	8	12	10	12	10	14	14	14
	4	9	11	10	15	9	11	9	11	11	13	13	13
	5	10		7		11		12		12		13	
20	1	28	28	46	46	20	20	37	37	23	23	33	33
	2	14	43	15	24	37	18	13	40	13	18	35	17
	3	11	17	12	21	14	14	16	17	15	17	18	18
	4	11	15	13	20	11	12	14	15	14	19	19	19
	5	15		11		17		19		14		17	
40	1	57	57	91	91	40	40	75	75	40	40	67	67
	2	27	80	25	36	73	25	19	66	23	28	73	26
	3	15	24	17	27	22	18	19	26	22	23	26	24
	4	15	21	15	27	15	18	21	19	18	23	22	24
	5	17		14		21		25		19		20	

P: P. Rパラメーター OP: 最適パラメーター
W: Wachspress m: パラメーターの数
パラメーター N=1/h

第3.7.1図 領域(a)(b)(c)に対するADIN法とADI法の計算回数

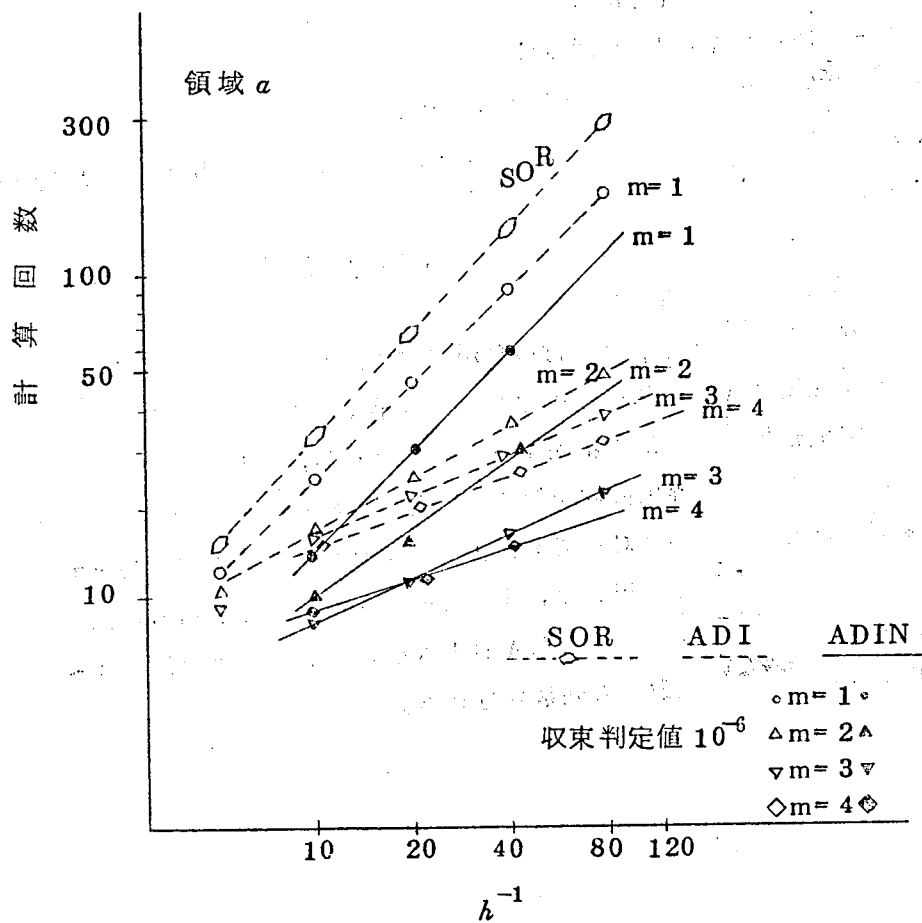
第3.7.4図は第3.7.1表を図にしたものである。縦軸は収束にいたるまでの計算繰返回数、横軸は分割数 h^{-1} である。縦横軸とも対数目盛である。

第3.7.2表および第3.7.2～4図を見ると、収束までに要するADIN法の計算回数はADI法の計算回数よりも少ないことがわかる。とくにADIN法にPeaceman - Rachfordのパラメーターを使った場合は、同じパラメーターを使ったADI法の計算回数の約 $\frac{1}{2}$ となる。又Wachspressのパラメーターを使ったADI法の計算回数よりも少い。この傾向は格子点の数が増加すると共にいちじるしい。この数値例は3.5節の平均収束率の近似が成立っていることを示している。

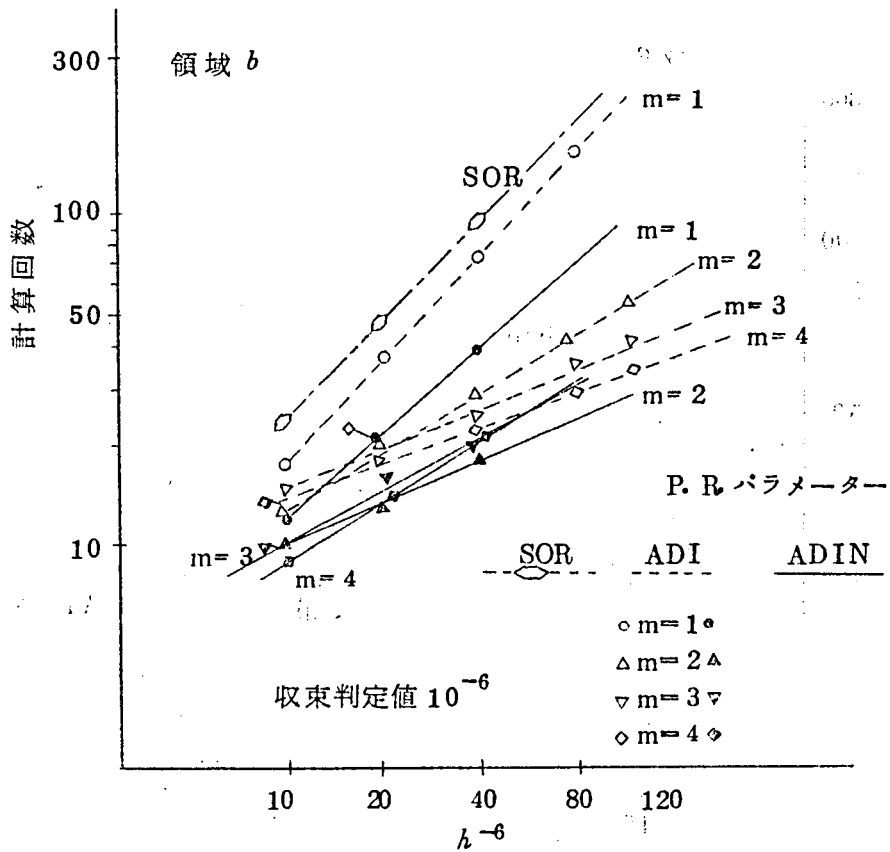
第3.7.1表(b)(c)に示すように、ADIN法の利点は矩形を一部切断した複雑な形の領域において著しい。

この数値計算は $h = \frac{1}{40}$ まで行ったが更に h が小さくなった場合、ADIN法の収束速度はADI法の収束速度よりも早くなるものと予想される。

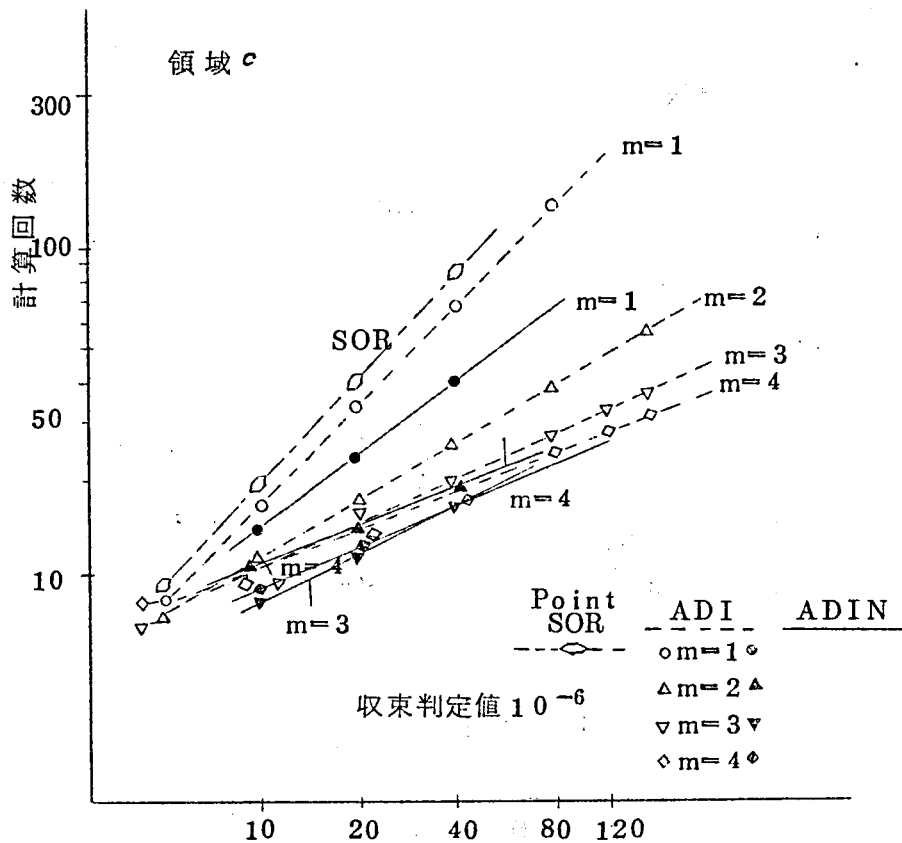
以上の実験結果から、次の結論をうる。すなわち、ADIN法によって、ラプラスの方程式の境界値問題を解く際に要する繰返計算回数は、正方形を一部変形した領域(b)、(c)に対しても、正方形に対する繰返計算回数と略ひとしい。そして、ここに用いた、すべての解法を通じてPeaceman-Rachfordパラメーターを用いたADIN法において、 m の値を3～4とした場合が最も少ない繰返計算回数を与える。



第 3.7.2 図 Peaceman-Rachford パラメーターによる
領域 α に対する ADI 法と ADIN 法の計算回数



第 3.7.3 図 Peaceman - Rachford パラメーターによる
領域 (b) に対する ADI 法と ADIN 法の 計算回数



第 3.7.4 図 Peaceman - Rachford パラメーターによる
領域(c)に対するADI法とADIN法の計算回数

第3.7.2表 A D I (N)法の各種パラメーターの値

h	m	Peaceman -Rachford	Wachspress	Optimum
10	1	0.61803400		0.61803400
10	2	0.24596235 1.1529451	0.097886967 3.9021131	0.18760957 2.0359623
10	3	0.18092034 0.61803400 2.1112388	0.097886967 0.61803399 3.9021131	0.13497175 0.61803400 2.8299802
10	4	0.15516607 0.38988857 0.97967999 2.4616595	0.097886967 0.33438737 1.1422860 3.9021131	0.11821609 0.33457893 1.1416320 3.2310830
10	5		0.097886967 0.24596234 0.61803399 1.5529451 3.9021131	
20	1	0.31319083		0.31319083
20	2	0.087907193 1.1158188	0.024623319 3.9753768	0.024623319 1.9753767
20	3	0.057556742 0.31319083 1.7042051	0.024623319 0.31286893 3.9753768	0.040456047 0.31319083 2.4245772
20	4	0.046572773 0.16592687 0.59115497 2.1061338	0.024623319 0.13407789 0.73007542 3.9753768	0.033125729 0.14039288 0.69723598 2.9550133
20	5		0.024623319 0.087771701 0.31286893 1.1152452 3.9753768	
40	1	0.15695853		0.15695853
40	2	0.031115900 0.79174897	0.0061653325 3.9938348	0.022434444 1.0981320
40	3	0.018143240 0.15695853 1.3578601	0.0061653325 0.15691819 3.9938348	0.012261962 0.15695853 2.0091540
40	4	0.013854188 0.069884949 0.35252200 1.7782335	0.0061653325 0.053345898 0.46157849 3.9938348	0.0093924997 0.058924690 0.41809268 2.6229420
40	5		0.0061653325 0.031103904	

h	m	Peaceman -Rachford	Wackspress	Optimum
			0.15691819	
			0.79164722	
			3.993848	
80	1	0.078519634		0.078519631
80	2	0.011003253	0.0015419275	0.0078568620
		0.56031907	3.9984583	0.78470673
80	3	0.0057152520	0.0015419275	0.0037654768
		0.078519631	0.078519632	0.078520642
		1.0787508	3.9984582	1.6373638
80	4	0.0041190070	0.0015419275	0.0026918638
		0.029393390	0.021183944	0.024740608
		0.20975235	0.29103799	0.24919891
		1.4968007	3.9984582	2.2903583
80	5		0.0015419275	
			0.011003253	
			0.078519632	
			0.56031907	
			3.9984582	
120	1	0.052353896		0.052353896
220	2	0.0059900539	0.00068535005	0.00426333
		0.45758027	3.9993148	0.64290834
120	3	0.0029079793	0.00068535005	0.0018960170
		0.052353897	0.052353897	0.052354899
		0.94255504	3.9993148	1.4456572
120	4	0.00202615	0.00068535005	0.0013022248
		0.017708830	0.012338721	0.014899126
		0.15477761	0.22214056	0.18396586
		1.3527777	3.9993148	2.1048059
120	5		0.00068535005	
			0.0059900539	
			0.052353897	
			0.45758027	
			3.9993148	

第4章 渦度方程式の数値解法

第2章および第3章においては、ポアソン方程式の数値解法について考察した。渦度方程式の数値解法の際に問題となるのは、ポアソンの方程式をとくための境界条件の設定法並びに逐次積分法の際の計算安定度である。中央差分近似を用いた場合、境界に隣接する格子点において、ヤコビアン項を計算するためには、境界上の格子点の渦度 η の値を各計算段階において知る必要がある。Charney はその境界に風が吹込んでいるか吹出しているかを、吟味して領域内の η の値から、境界上の η の値を決定している。一方、Forsythe と Wasow は η の境界値を用いなくてヤコビアン項の値を計算する方式を提案している。この方式は前進差分と後退差分を混合して用いるもので、領域内の各点の風の方向を吟味して、風上方向に片側差分をとるので“UPWIND DIFFERENCE (風上差分)法”と呼ばれる。本章ではこれらの解法を論述し、例題について中央差分方式と風上差分方式との解を求め、解の精度と比較して、中央差分方式の方がよい近似度を持つことを実証した。⁽³⁾⁽⁴⁾ 渦度方程式の解は時間と共に発散する傾向をもつ波動である。

4.1 境界条件

第1.4節において、二次元の渦度方程式の数値計算法について、簡単に説明した。しかし、各計算段階における、ポアソンの方程式は、境界条件が定まらなないと解くことが出来ない。渦度方程式は(1.4.7), (1.4.8)式から、つぎのように書ける。

$$\nabla^2 \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right) = \frac{g m^2}{f} \left(\frac{\partial \nabla^2 z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial \nabla^2 z}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial x} \right) - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial x} \quad (4.1.1)$$

このような式は境界上の z の値を知るだけでは、積分することは出来ず、流体が境界に流入する場所の $\nabla^2 z$ の値も与えられなければならない。⁽²⁸⁾

数学上このような問題に対する一般理論は存在しない。従って(4.1.1)式の初期値および境界値問題が唯一解をもつことも断言出来ない。最近、Sensening⁽²⁷⁾ は領域 R が半平面であるときに、唯一解の存在を証明している。ここでは正方形領域 R においても唯一解が存在するものと仮定する。

Charney, Fjörtoft および Von Neumann⁽²⁸⁾ は (1, 4, 9) および (1, 4, 10) 式に対する境界条件として, つぎの条件を設定した。説明の便宜上 (1, 4, 9) および (1, 4, 10) 式を再掲する。

$$\nabla^2 z = \left(\frac{g m^2}{f} \right)^{-1} (\eta - f) \quad (1, 4, 9)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{g m^2}{f} J(\eta, z) \quad (1, 4, 10)$$

- (1) $z(x, y, t)$ の値はすべての時刻 t における境界 C 上の点 (x, y) に対して与えられる。
- (2) $\eta(x, y, t)$ の値は, 流体が流入する境界上の点 (x, y) に対して, すべての時刻 t において与えられる。

流体の速度は $(-\frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial z}{\partial x})$ に比例するから, 流体が流入する点における, z の切線方向の微係数 $\frac{dz}{ds}$ は

$$\frac{dz}{ds} \geq 0 \quad (4, 1, 2)$$

である。ここに, S は領域 R の境界上 C の長さを表し, R を左に見て動く方向を正とする。

- (3) 初期条件は $z(x, y, 0)$ が R 内のすべての点 (x, y) に対して与えられていること。

このような境界条件の設定に対して, 理論的な正当性は存在しない。しかしながら, 数値予報においては, この条件を実験的に正当なものと認めている。

4.2 渦度方程式の差分近似

等角写像による天気図上に正方形領域 R をとり, x 軸および y 軸に平行な直線群で格子を作り, 直線間の距離はすべてひとしく h とする。

x 座標に当る格子点の添字を整数 i とし, y 座標に当る格子点の添字を整

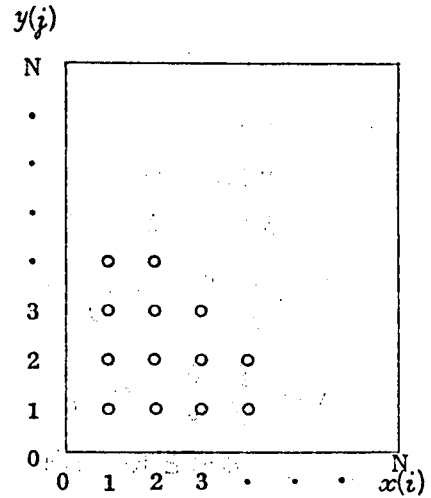
数 j とする。 x と η に対応する差分表示を Z および H とする。格子点をこのように選ぶと (1, 4, 9), (1, 4, 10) 式の差分近似式は中央差分を用いるとつぎのようになる。

(1, 4, 9) 式に対しては、次式で近似する。

$$h^{-2} \{ Z(i+1, j, t) + Z(i, j+1, t) + Z(i-1, j, t) + Z(i, j-1, t) - 4Z(i, j, t) \} =$$

$$= \left(\frac{g m^2(j)}{f(j)} \right)^{-1} [H(i, j, t) - f(j)]$$

(4, 2, 1)



第4・2・1図 格子点の表示

(1, 4, 10) 式に対しては、 k を時間間隔としたとき、

$$(2k)^{-1} \{ H(i, j, t+k) - H(i, j, t-k) \}$$

$$= \left(\frac{g m^2(j)}{f(j)} \right) (2k)^{-2} \{ [H(i+1, j, t) - H(i-1, j, t)]$$

$$[Z(i, j+1, t) - Z(i, j-1, t)] - [H(i, j+1, t)$$

$$- H(i, j-1, t)] [Z(i+1, j, t) - Z(i-1, j, t)] \}$$

(4, 2, 2)

但し $t=0$ なるときは (4, 2, 2) 式の左辺は、つぎの片側差分を使って計算する。すなわち (4, 2, 2) 式の左辺を

$$k^{-1} [H(i, j, k) - H(i, j, 0)]$$

とする。(4, 2, 1), (4, 2, 2) 式による計算体系においては、領域の外縁上の点の $(\partial \eta / \partial t)$ の値を (4, 2, 2) 式で求めるとき、右辺の計算を行うために境界上の H の値を知る必要がある。ここで $\partial \eta / \partial t$ の境界値を次のように定めることにする。(28) (1, 4, 9), (1, 4, 10) 式を導くにあたって、風向は地衡風によって近似しており、絶対渦度 η は保存されていると仮定している。従って風が境界から流れ出す点の $\partial \eta / \partial t$ の値は領域内の値を外挿して求める。風が境界に流入する点の $\partial \eta / \partial t$ の値は、不明であるの

で零と仮定する。

地衡風近似によって、 x 方向の風の成分 U と、 y 方向の風の成分 V は差分近似式で表すとつぎのようになる。

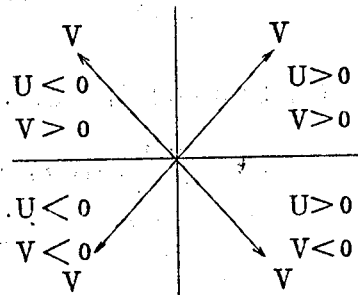
$$U = -\frac{g}{f} \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{g}{f(j)} [Z(i, j+1, t) - Z(i, j-1, t)]$$

$$V = \frac{g}{f} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{g}{f(j)} [Z(i+1, j, t) - Z(i-1, j, t)] \quad (4.2.3)$$

U 、 V の符号と風の方角との関係は第4.2.2図のようになる。第4.2.1図に示す領域について、この関係は次式のようにかき表わせる。

$i = 0$ 辺：

$$Z_{0, j+1} - Z_{0, j-1} \begin{cases} > 0, \left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)_{0, j} \\ = 2\left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)_{1, j} \\ - \left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)_{2, j} \\ \leq 0, \left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)_{0, j} = 0 \end{cases}$$



第4.2.2図

$i = N$ 辺：

$$Z_{N, j-1} - Z_{N, j+1} \begin{cases} > 0, \left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)_{N, j} = 2\left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)_{N-1, j} \\ - \left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)_{N-2, j} \\ \leq 0, \left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)_{N, j} = 0 \end{cases} \quad (4.2.4)$$

$j = 0$ 辺:

$$Z_{i-1} - Z_{i+1} \begin{cases} > 0, \left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)_{i,0} = 2\left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)_{i,1} - \left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)_{i,2} \\ \leq 0, \left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)_{i,0} = 0 \end{cases}$$

$j = N$ 辺:

$$Z_{i+1, N} - Z_{i-1, N} \begin{cases} > 0, \left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)_{i, N} = 2\left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)_{i, N-1} - \left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)_{i, N-2} \\ \leq 0, \left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)_{i, N} = 0 \end{cases}$$

(4.2.4) 式によって、境界 C 上の $H(i, j, t)$ の値がすべて決定されるので、(4.2.2) 式を使うことにより、領域 R 内の格子点に対する H の値、 $H(i, j, t+k)$ がすべて決定できる。 $Z(i, j, t+k)$ の値は $H(i, j, t+k)$ の値を (4.2.1) 式の右辺に代入して、(4.2.1) 式をとくことによって求まる。

以上が Charney 等によって行なわれた方法である。一方、風上差分方式は (1.4.10) 式の差分近似式の計算に際して H の境界値を用いる必要がないように、中央差分の (4.2.2) 式に対応する式を作ったものである。今風の各成分を (4.2.3) 式によって計算して、ある格子点における U, V の符号に従って (1.4.10) 式の差分近似式をつぎのように定める。

$U \geq 0, V \geq 0$ のとき

$$\begin{aligned} & k^{-1} [H(i, j, t+k) - H(i, j, t)] \\ &= -\frac{g m^2}{f(j)} U(i, j, t) k^{-1} [H(i, j, t) - H(i-1, j, t)] \\ &\quad - \frac{g m^2}{f(j)} V(i, j, t) k^{-1} [H(i, j, t) - H(i, j-h, t)] \quad (4.2.5 a) \end{aligned}$$

$U < 0, V \geq 0$ のとき

$$k^{-1} [H(i, j, t+k) - H(i, j, k)]$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{g m^2}{f(j)} U(i, j, t) h^{-1} [H(i+1, j, t) - H(i, j, t)] \\
&\quad - \frac{g m^2}{f(j)} V(i, j, t) h^{-1} [H(i, j, t) - H(i, j-1, t)] \quad (4.2.5b)
\end{aligned}$$

$U \geq 0, V < 0$ のとき

$$\begin{aligned}
&k^{-1} [H(i, j, t+k) - H(i, j, k)] \\
&= -\frac{g m^2}{f(j)} U(i, j, t) h^{-1} [H(i, j, t) - H(i-1, j, t)] \\
&\quad - \frac{g m^2}{f(j)} V(i, j, t) h^{-1} [H(i, j+1, t) - H(i, j, t)] \quad (4.2.5c)
\end{aligned}$$

$U < 0, V < 0$ のとき

$$\begin{aligned}
&k^{-1} [H(i, j, t+k) - H(i, j, t)] \\
&= -\frac{g m^2}{f(j)} U(i, j, t) h^{-1} [H(i+1, j, t) - H(i, j, t)] \\
&\quad - \frac{g m^2}{f(j)} V(i, j, t) h^{-1} [H(i, j+1, t) - H(i, j, t)] \quad (4.2.5d)
\end{aligned}$$

U, V の符号によって、風の方向は第 4.2.2 図に示すように定まるから、(4.2.5) 式から明らかなように、この方式は風上に当る方向の片側差分で微分を近似したものである。(4.2.5) 式に従うと、風が流入する境界点における $\partial \eta / \partial t$ の値を零とすれば、風が流出する境界点における $\partial \eta / \partial t$ の値は計算する必要がない。従って (4.2.5) 式によって、領域 R 内の格子点における $\partial \eta / \partial t$ の値がすべて決定される。しかしながら、この方式では R 内のすべての格子点について風の方向を (4.2.3) 式によって吟味しなければならない。この方法の特長は計算安定度が厳密に証明される点である。これについては次節で説明する。

4.3 計算安定度

微分方程式を差分方程式に直して、逐次積分をおこなうことを考える。差

分近似の要素は距離間隔 ($\Delta x, \Delta y$) および時間間隔 (Δt) である。

$\Delta x = \Delta y = \Delta s$ とするとき、よい近似をうるためには Δs と Δt との大きさを、対象とする物理的運動にくらべて充分小さくしなければならない。しかしながらこれだけで望ましい解をうることはできない。この他に Δs と Δt の比率に関する計算安定度の問題がある。渦度方程式 (4.1.1) 式は非線型偏微分方程式であって、このような式の計算安定度を直接求めることは出来ない。従って (4.1.1) 式を線型化した式の安定条件を、Courant, Friedrichs および Lewy⁽²⁹⁾ の理論から求め、この安定条件を (4.1.1) 式に対する近似的な安定条件とする。

今風のベクトル V が一様であつて、(4.2.3) 式で表わされる風の成分 U, V が常数であると仮定する。このとき、(4.2.2) 式は次のように線型化される。すなわち、(4.2.2) 式に (4.2.3) 式を代入すると

$$\delta_t H = m \lambda (U \delta_x H + V \delta_y H) \quad (4.3.1)$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned} \delta_t H &= [H(x, y, t + \Delta t) - H(x, y, t - \Delta t)] \\ \delta_x H &= [H(x + \Delta s, y, t) - H(x - \Delta s, y, t)] \\ \delta_y H &= [H(x, y + \Delta s, t) - H(x, y - \Delta s, t)] \end{aligned} \quad (4.3.2)$$

$$\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta s}$$

を表わす。

(4.3.1) 式の安定性を検討するために、摂動法を使い、 H の値を $H + H'$ とする。このとき摂動方程式は

$$\delta_t H' = m \lambda (U \delta_x H' + V \delta_y H') \quad (4.3.3)$$

となる。 H' の解として、フーリエ級数の一つの成分を、

$$H' = e^{i(\alpha x + \beta y + \nu t)} \quad (4.3.4)$$

と考え、(4.3.2) 式に代入して整頓すると

$$\delta_t H' = H' (e^{i \nu \Delta t} - e^{-i \nu \Delta t})$$

$$\delta_x H' = H' (e^{i\alpha\Delta s} - e^{-i\alpha\Delta s}) \quad (4.35)$$

$$\delta_y H' = H' (e^{i\beta\Delta s} - e^{-i\beta\Delta s})$$

となる。この値を(4.3.3)式に代入すると、

$$e^{i\nu\Delta t} e^{-i\nu\Delta t} = 2im\lambda(U\sin\alpha\Delta s + V\sin\beta\Delta s) \quad (4.36)$$

となる。

ここで $\omega = e^{i\nu\Delta t}$, $a = m\lambda(U\sin\alpha\Delta s + V\sin\beta\Delta s)$ とおくと(4.3.6)式は

$$\omega - \omega^{-1} = 2ia \quad (4.37)$$

となる。 H' が指数関数的に増大しないためには、 $|\omega| \leq 1$ でなければならない。いいかえると

$$\omega^2 - 2ia\omega - 1 = 0 \quad (4.38)$$

の2根 ω が $|\omega| \leq 1$ でなければならない。 $|\omega| \leq 1$ なるための必要且充分条件は $|a| \leq 1$ である。ここに α, β は ΔS の関数であるが、 $\sin\alpha\Delta S \neq \sin\beta\Delta S \neq 1$ となるような α, β の値に対して、(4.3.1)式が安定なためには、

$$\lambda m (|U| + |V|) \leq 1 \quad (4.39)$$

でなければならない。 $|U| + |V|$ の最大値は $\sqrt{2} \max |V|$ である従って(4.3.8)式の条件は

$$\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta S} < \frac{1}{\sqrt{2} m \max |V|} = \frac{1}{\sqrt{2} m^2 \max |\nabla z|} \quad (4.310)$$

となる。 m は ΔS と V との長さの単位を、ひとしくするための拡大係数である。

今大気の運動を、 x 方向に一様な偏西風 U があって、 y 方向には小さな擾乱 V があるのみと考える。 ΔS の大きさを 360 Km とすると $U = 100 \text{ m/sec}$

に対して $\Delta t < 1$ 時間, $U = 50 \text{ m/sec}$ に対し, $\Delta t \leq 2$ 時間となる。

風上差分方式の計算安定度および収束性

風上差分方式の差分方程式 (4.2.5 a) を書きかえると次式をうる。

$$\begin{aligned} H(x, y, t+k) = & \lambda \alpha U(x, y, t) H(x-h, y, t) \\ & + [1 - \lambda \alpha U(x, y, t) - \lambda \alpha V(x, y, t)] \\ & H(x, y, t) + \lambda \alpha V(x, y, t) H(x, y-h, t) \end{aligned} \quad (4.3.11)$$

ただし $\lambda = \frac{k}{h}$, $\alpha = \frac{g m^2}{f(y)}$ である。

(4.3.11) 式の H の係数がすべて正なる条件は

$$\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta s} \leq \{ \max[|\alpha U(x, y, t)| + |\alpha V(x, y, t)|] \}^{-1} \quad (4.3.12)$$

となる。この条件は (4.2.5 b), (4.2.5 c), (4.2.5 d) 式について (31)(32) も成立する。

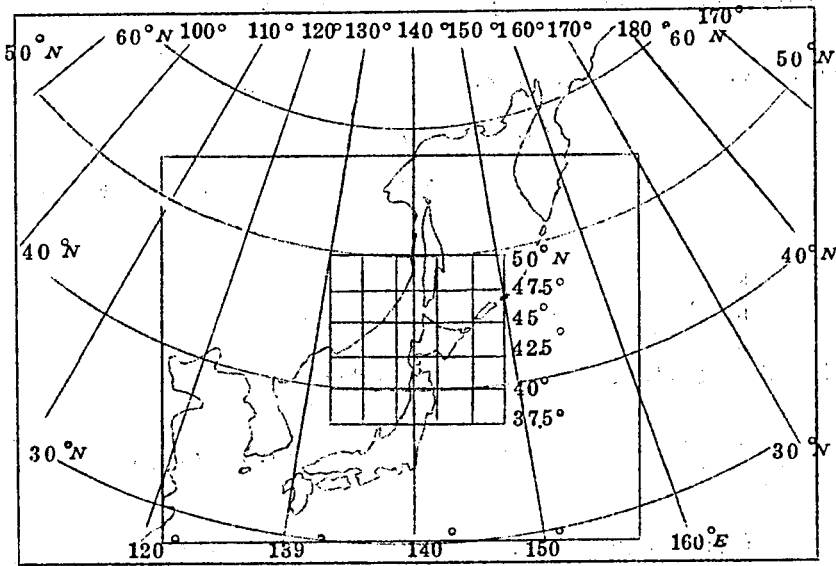
このとき, (4.3.11) 式はポジティブ・タイプの差分方程式となる。ポジティブ・タイプの差分方程式は安定であって解は収束する。(20)(30)

4.4 数値計算に用いた領域

第1章においてのべたように, 二次元における気象の数値予報方程式は, 大気を準静的平衡状態にあり, 断熱的に変化する非圧縮, 非粘性, 等密度の流体と仮定している。そして大気の運動から動力波を除くために, 地衡風近似を用いている。従って, 例題の初期値および境界値としては, 上の仮定の近似度を見るために, 実際の観測値をとるべきである。しかしながら, 本論文では気象予報を直接の目的とするものでなく, 数値解析を目的としているので, 初期値及び境界値を任意にえらび, 中央差分および風上差分による計算を行い, その結果を検討する。(32) 更に第2部においては, 渦度方程式のアナログ・シミュレーションによる計算結果と比較するため, 5点のみを含む単位領域について計算し解を求める。この領域を便宜上5点領域と呼ぶことに

する。

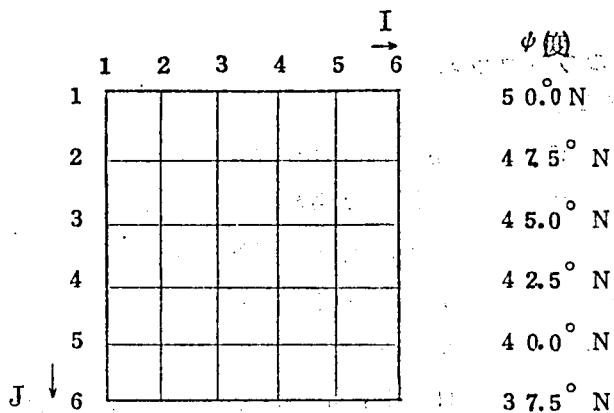
今第4.4.1図を $60^{\circ}N$ ステレオ投影図とする。この地図では、 $60^{\circ}N$



第4.4.1図 極東における予報領域

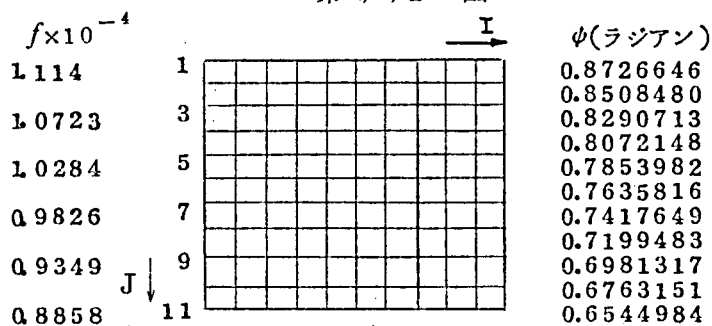
上の距離に対して縮尺が定められている。縮尺によって格子間隔を定めた場合、 $60^{\circ}N$ 以外の緯度における距離は拡大係数によって修正しなければならない。 $60^{\circ}N$ における緯度円上において、経度間隔 10° に対する、地球上の距離は 588 Km であるから、格子間隔を 300 Km と選ぶとき、これは約 5° に当る。緯度 10° に相当する距離は約 1110 Km である。

$50^{\circ}N$ 近傍において、地図上の距離 300 Km は、地球上では $\frac{1}{m}$ となるから 285 Km である。又 $30^{\circ}N$ の近傍においては 242 Km である。この考察から一辺 1500 Km の正方形領域を 300 Km の格子間隔の正方格子網でおおった場合、縦軸の間隔を 2.5° の緯度間隔で近似し、各格子点におけるコリオリの因子 $f=2\omega\sin\phi$ の値を定めることとする。第4.4.2a図は 6×6 正方領域と f の値を示す。第4.4.2b図は格子間隔を $\frac{1}{2}$ にしたもので 11×11 正方領域を示す。第4.4.3図は5点領域である。



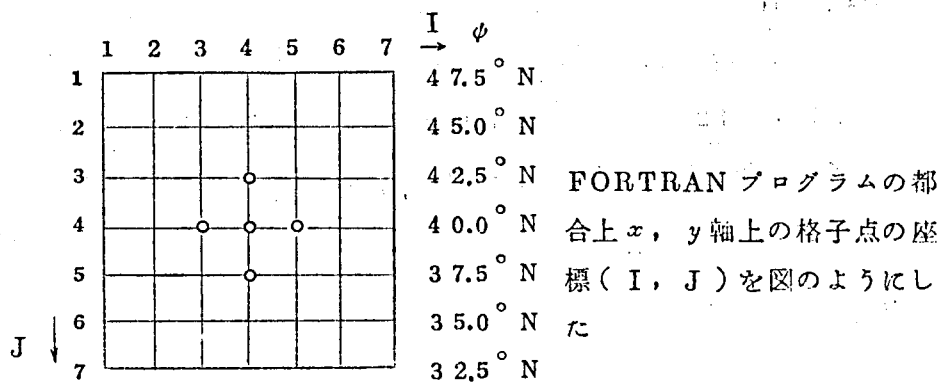
6 × 6 領域

第 4, 4, 2 a 図



11 × 11 領域

第 4, 4, 2 b 図



5 点領域

第 4, 4, 3 図

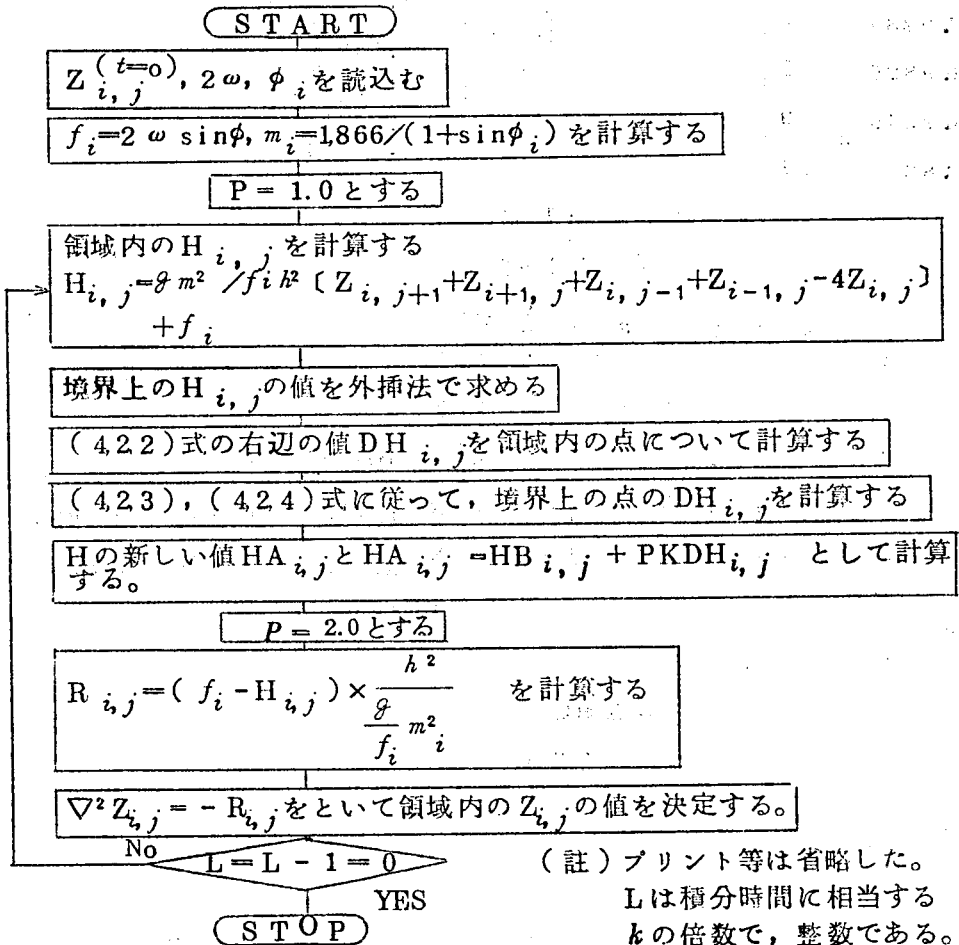
4.5 中央差分方式のプログラム

(4.2.1), (4.2.2) および (4.2.4) 式にもとずいて, 計算する.
 FORTRAN プログラムについて述べる. 計算に先立って必要な値は Z の初期値および境界値, コリオリ因子 f , 拡大係数 m , 格子間隔 h , 重力の加速度 g , 時間間隔 k の値である. f と m は地球の回転角速度 $\omega = 7.292 \times 10^{-5} \text{ sec}^{-1}$ および緯度 ϕ の値から計算によって求める. 格子点の配列は, (I, J) とし, 方向は第 4.4.2 図に示すようにえらぶ.

つぎに示すフローチャート中, $H(I, J)$ は $\eta(x, y)$ を表す.
 H^t の値を H , H^{t-k} の値を HB , H^{t+k} の値を HA とする.

FORTRAN プログラムは付録 6 に示した.

中央差分方式のフローチャート

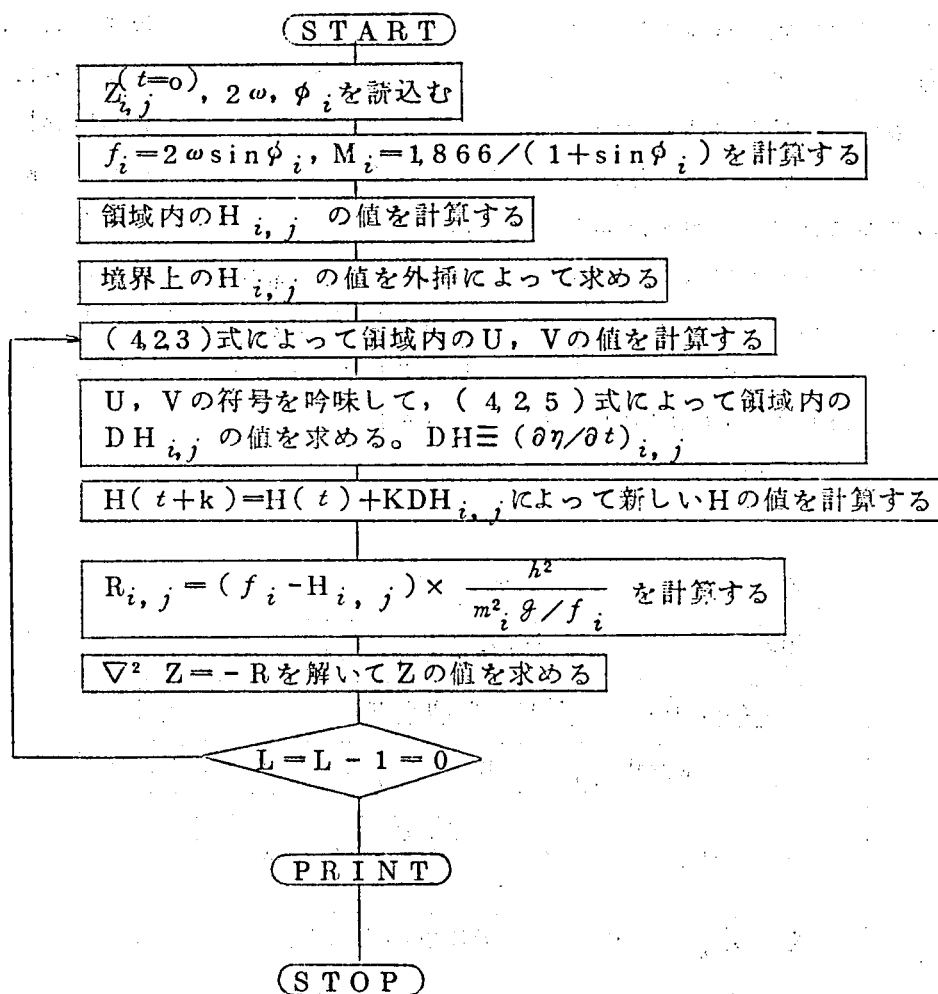


4.6 風上差分方式のプログラム

(4.2.1), (4.2.3) および (4.2.5) 式にもとづくプログラムを前節と同様に考える。計算に先立って与える初期値, 常数等は中央差分の際と同じである。この方式の逐次積分は前進差分であるので, H の記憶場所は 1 配列のみでよい。

FORTRAN プログラムは付録 7 に示した。

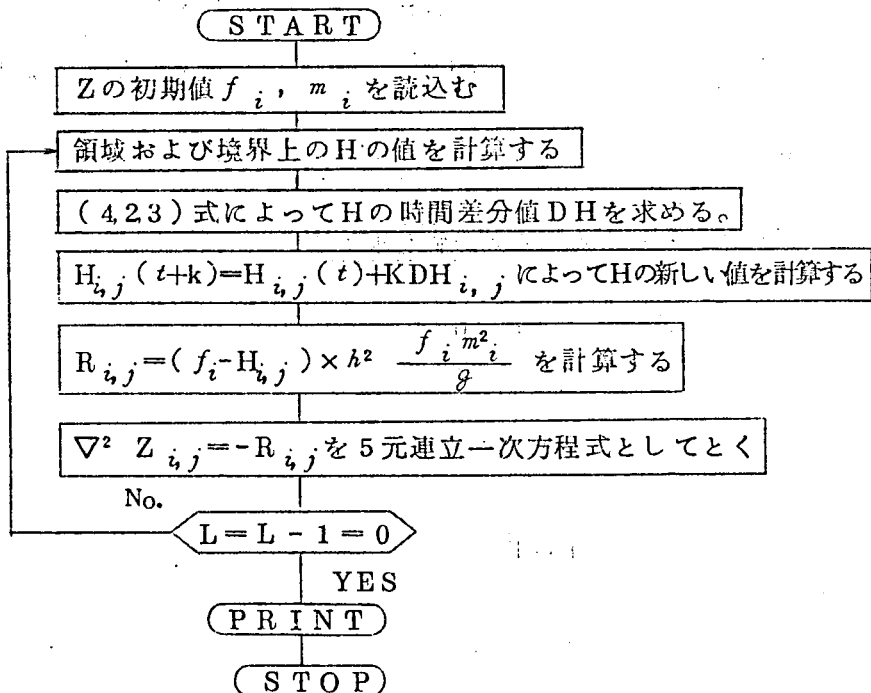
風上差分方式のフローチャート



4.7 5点領域に対するプログラム

第4.4.3図に示す領域については、第2部にのべるアナログシミュレーションの計算結果と比較するため、計算方法を少し変更する。中央差分方式においては、境界上の渦度を、4.2に示したように地衡風の方角を吟味することによって決定する。一方風上差分方式では境界上の渦度の変化を計算しない代わりに領域内のすべての格子点について、地衡風の方角を吟味する。このような符号判定の機能をアナログシミュレーションによつて実現することは困難である。アナログシミュレーションでは、変数を Z と t の二つのみにとり、境界上の H の値は Z の関数として定めている。このときは Z の境界値を境界の一つ外側の点まで与えておく必要がある。従つてデジタル計算の際もこのように H の境界値を計算することにする。なお、この際変化点5点に対するポアソンの方程式の差分式の差分近似式は5元連立一次方程式となるので、2.7節に示す反復法の最も簡単な場合として直接法で解くことができる。 Z の値は境界の一つ外側の値まで与える。これによつて H の境界値も与えられる。このときのFORTRAN プログラムを付録8に示す。

5点領域の計算フローチャート



4.8 6×6および11×11 領域

渦度方程式は音波、重力波およびRossby wave の三要素のうち、とくにRossby wave のような長波のみをとり出すように、大気の運動方程式を変形したものである。従って渦度方程式の初期値は、平面上の横波であるべきであり、解も主としてRossby waveの伝播を表す横波である。

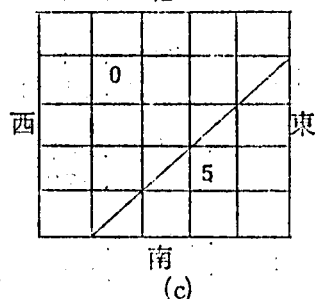
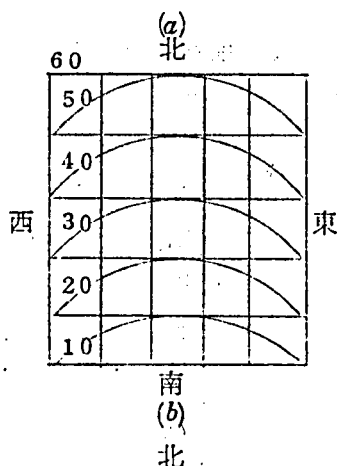
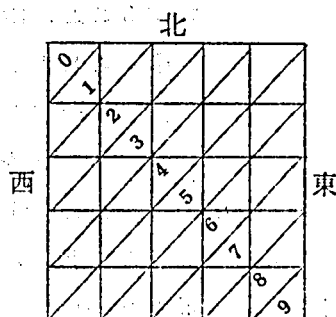
例題の初期値としては、第4・8・1図(a), (b), (c)図のような分布を考える。(d)図は格子点の番号を示している。

(a)図は気圧高度が北西から南東にかけて一様に傾斜している場合である。(b)図は南北方向に一定の気圧傾度を持ち、東西方向には正弦波分布をしている場合である。(c)は北東隅と南西隅を結ぶ線から南が一定高圧で、北が一定低圧の場合である。

Rossby wave の観点から(b)の場合が最も物理的に意味があり、(c)の場合は気圧の不連続な分布であって、広い範囲にわたっては実際におこりえない場合である。しかしながら計算方式を比較する場合は、切断誤差がいちじるしくなるので、都合がよい。

ここでは、これら三種の例題を6×6領域および11×11領域について解き、24時間後の解を求めた。(32), (42)

△Tは1時間とした。計算結果の分析は各点のZおよびHの時間的变化及び一定時間毎の平面波の推移状態の二通りに整理される。前者の見方は二つの計算の相対誤差を計算するとき

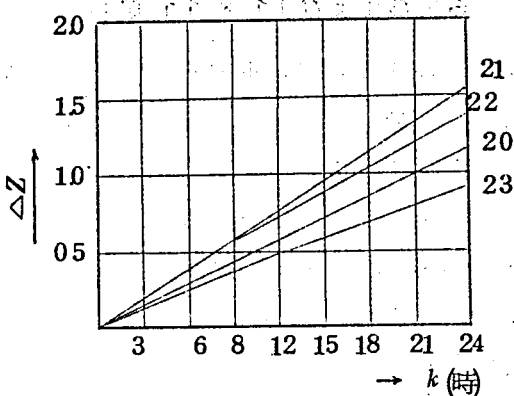


(d)

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36

第4・8・1図
初期値の分布及び格子点の番号

使用する。しかし格子点の数が多くなると、比較することが困難になるので、後に第(4.8.1)式に示すように平均値で比較する。後者の方法は気圧分布の変化をよく示すことが出来る。ここでは、特定の点をえらんでその点のZおよびHの変化を時間について示している。



第4.8.2図

平面波の推移状態は全般的な波動きを示すものである。

点 \ k	3	6	9	12	15	18	21	24
14	.126	.257	.393	.534	.680	.831	.986	1.147
	.129	.264	.402	.545	.691	.842	.996	1.154
15	.178	.359	.542	.727	.914	1.103	1.292	1.483
	.184	.370	.558	.748	.938	1.129	1.321	1.514
16	.176	.350	.522	.691	.857	1.020	1.179	1.335
	.182	.362	.539	.713	.884	1.050	1.213	1.371
17	.121	.238	.350	.457	.560	.657	.750	.837
	.126	.247	.363	.474	.580	.679	.774	.863
20	.130	.267	.408	.554	.705	.861	1.021	1.187
	.134	.272	.415	.561	.711	.864	1.021	1.181
21	.184	.371	.560	.751	.943	1.137	1.331	1.527
	.189	.381	.574	.767	.962	1.157	1.350	1.544
22	.182	.362	.539	.712	.883	1.050	1.213	1.372
	.188	.373	.554	.731	.905	1.074	1.238	1.398
23	.126	.246	.362	.472	.578	.677	.772	.861
	.130	.255	.374	.487	.595	.696	.791	.881

第4.8.1表 第4.8.1 a 図の初期値を与えた場合、時間Kに対する ΔZ の変化、上欄は中央差分、下欄は風上差分の値。

まづ 6×6 領域で(a), (b)および(c)を計算する。第4.8.2図は例題(a)の初期値について、格子点2.0.2.1.2.2.2.3におけるZの変化量 ΔZ を横軸に時間をとって示したものである。第4.8.1表は1.4~1.7. 2.0~2.3の格子点について、中央差分および風上差分による ΔZ の値を、積分時間に対して示したものである。この表にみられるように、両差分方式による計算結果の差は大きくないので、第4.8.2図には中央差分の計算値のみを示した。2.4時間後のZの分布は第4.8.3図のようになる。この例題では中央差分方式および風上差分方式による計算結果は殆んど一致している。

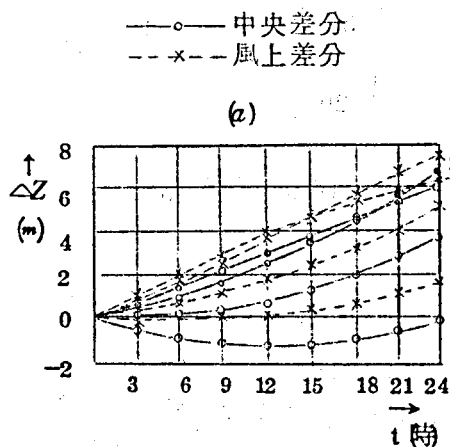
初期値を第4.8.1図(b)のようにとったとき、Zの変化量 ΔZ と積分時間tとの関係を第4.8.4(a)図に示す。

図中実線は中央差分方式、破線は風上差分方式による計算値

第4.8.4図

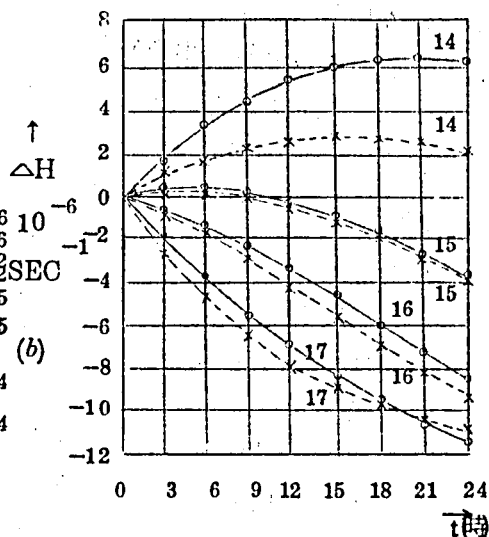
正弦波状初期値第4.8.1(b)

図に対する風上差分方式と中央差分方式の ΔZ と ΔH の変化の模様



第4.8.3図

Zの分布



である。格子点の値は14～17のものを示した。一般に境界に近い点、とくに風が境界から流出するところでは両者の計算値の差が大きくなる。これは計算方式から当然である。第4.8.4(b)図はHの変化量 ΔH と積分時間 t との関係である。この(a)、(b)両図から、領域の分割数を或程度多くとれば、境界の近傍の点を除けば、風上差分および中央差分による計算結果はよく一致することが推定できる。このことは11×11領域の場合をみれば一層明らかになる。第4.8.5図は、24時間後における等圧面高度Zの分布を示す。この初期値の場合、風のx方向の成分Uは約 -3 m/sec であるから、24時間では約260 Km西の方へ進むことになる。第4.8.5図をみると、格子間隔は300 Kmにとっているため、この関係が成立っていることがわかる。

つぎに第4.8.1(c)図の初期値に対する計算結果をのべる。第4.8.6(a)、(b)図はZの変化量 ΔZ 、およびHの変化量 ΔH を時間 t に対して示したものである。図を見やすくするために、格

子点14～17に対する ΔZ 値のみを示した。Zの値が初期分布において急激に変化している格子点11、

16、17、21、22、26、27の変化量 ΔZ および ΔH は変動が大きく、両差分方式の計算は相当異なっている。この図からわかるように、一般に $\Delta Z / \Delta t$ の符号は $\Delta H / \Delta t$ の符号と反対である。第4.8.7図は、24時間後の等圧面高度Zの分布を示したものである。この図の中で中央差分および風上差分による計算結果は相当異なっている。しかし乍ら

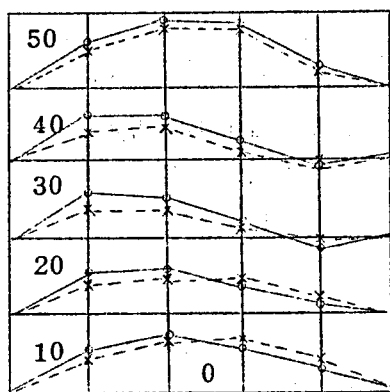
このような初期値の与え方は渦度方程式の前提条件—静的平衡状態—と矛盾しており、初期値(a)、(b)のようなものが、実際上の初期分布に現われるものと考えられる。従って、例題Cのような初期値は差分計算方式に対して不当であり、計算結果には、切断誤差が顕著にあらわれるものと思われる。

第4.8.5図

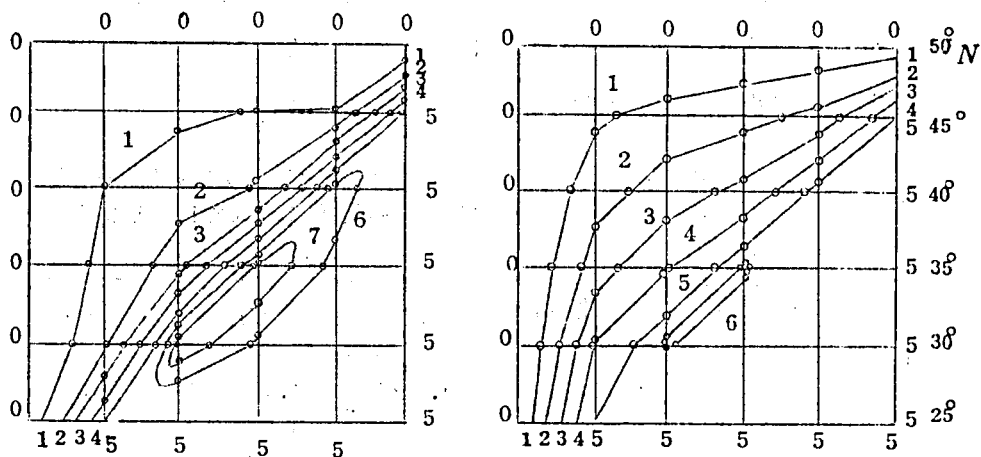
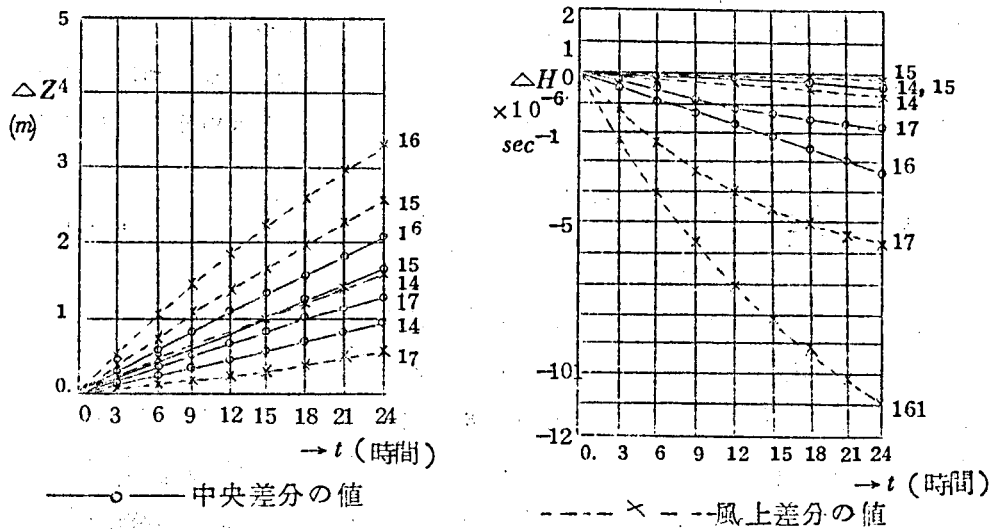
正弦波状初期値の場合
K=24(時間)におけるZ
の分布

—○— 中央差分
---x--- 風上差分

60



第 4.8.6 図 初期値第 4.8.1(c)図に対する中央差分および風上差分方式による ΔZ と ΔH との変化状況



第 4.8.7 図 中央差分方式および風上差分方式による $K=24$ (時間) における等圧面高度 Z の分布 (6×6) 領域

11×11領域については、(b)の初期値についてのみ計算し、両計算方式による結果を比較した。第4.8.8図は24時間後におけるZの分布を、両計算方式によって求めたものである。両計算方式による計算結果はよく一致している。図中、破線は第4.8.5図の中央差分による6×6領域の計算結果を示したものである。領域を11×11に分割することによって、波形が滑らかになり、誤差が少なくなるために、結果は相当に異なっている。

中央差分方式及び風上差分方式によって得た結果を整理するために、中央差分方式に対する風上差分方式の相対誤差を次式によって求めることにする。

$$\varepsilon (\%) = \frac{1}{N} \sum_i^N \left| \frac{Z_i^{(k)}(U) - Z_i^{(k)}(S)}{Z_i^{(k)}(S)} \right| \times 100 \quad (4.8.1)$$

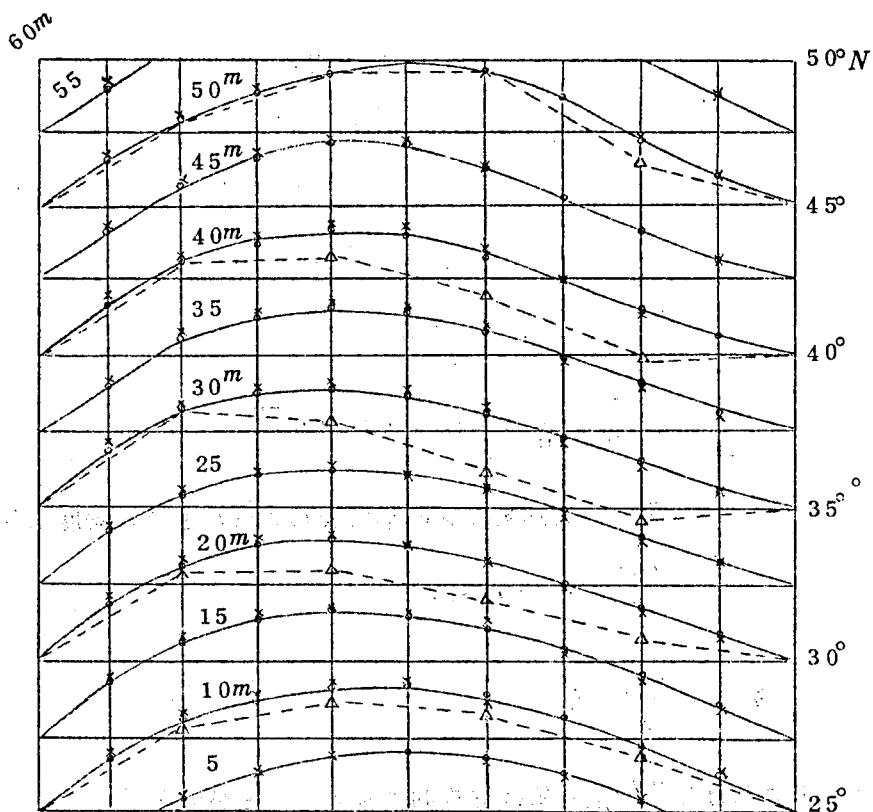
ここに $Z_i(U)$ は風上差分方式で求めたZの値

$Z_i(S)$ は中央差分方式で求めたZの値

である。12時間後および24時間後の ε の値を第4.8.2表に示す。この表から初期値(b)の場合について考えると、24時間の積分において、格子間隔が観測された波の $\frac{1}{10}$ 波長のときは1.852%，格子間隔が $\frac{1}{20}$ 波長のとき0.564%の相対誤差をもつことがわかる。従って計算の対象とする波の波長に対して格子間隔が充分小さければ、風上差分方式を中央差分方式の代りに使用して差支えないであろう。⁽⁴²⁾

第4.8.2表 正弦波状初期値に対する風上差分による計算値の中央差分方式による計算値に対する相対誤差(4.8.1)式の値

領 域	時 間 \ 初期 値	(a)	(b)	(c)
6×6	12	0.425	3.593	62.26
	24	0.520	1.852	45.80
11×11	12		0.749	
	24		0.564	



第488図 中央差分および風上差分による計算値の比較
初期値は正弦波状分布である。
○中央差分
×風上差分
△中央差分(6×6)

次に中央差分および風上差分によつて計算した $\frac{\partial \eta}{\partial t}$ の値の解析解に対する標準偏差および相関係数をとつて比較してみる。標準偏差および相関係数は、 x_i を解析解、 y_i を差分近似解とした場合、次式によつて定義される。

標準偏差

$$\sigma = \sqrt{\frac{n}{\sum_{i=1}^n (y_i - x_i)^2} n} \quad (482)$$

相関係数

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right)}} - \frac{1}{2} \quad (483)$$

ここで n は領域内の格子点の数を表わす。
 第 4.8.1(b) 図の初期値の分布は次式で表わされる。

$$z = \alpha y + \beta (1 - \sin r x) \quad (4.8.4)$$

格子間隔は 300 Km であるから α, β, r の解はつぎのようになる。

$$\alpha = \frac{10}{300,000}, \quad \beta = 10$$

$$r = \frac{\pi}{1,500,000} = 2.0944 \times 10^{-6}$$

このように、 Z の初期分布が連続関数の形で表わされたとき、渦度方程式

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{g m^2}{f} J(\eta, z)$$

$$\eta = \frac{g m^2}{f} \nabla^2 z + f$$

の $t = 0$ における $\frac{\partial \eta}{\partial t}$ の値は解析的に求めることができる。

$t = 0$ において

$$\frac{\partial z}{\partial t} = -\beta \cos r x + r, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \beta \sin r x + r^2$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \alpha, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \quad (4.8.5)$$

であるから

$$\eta = \frac{g m^2}{f} \beta r^2 \sin r x + f \quad (4.8.6)$$

で与えられる。従って $t = 0$ なるときの $(\frac{\partial \eta}{\partial t})_{t=0}$ の値はつぎのようになる。

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)_{t=0} &= \frac{g m^2}{f} J(\eta, z) \\ &= \frac{g m^2}{f} \left\{ \frac{g m^2}{f} \alpha \beta r^2 \cos r x + \frac{2\omega}{R} \beta r \cos \varphi \right\} \end{aligned}$$

$$\cos r x \times \left(1 - \frac{g m^2}{f} \beta r^2 \sin \alpha x \right) \} \quad (487)$$

ここに、Rは地球の半径、 φ は緯度である。

又、

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2\omega}{R} \cos \varphi \text{ なる関係がある。}$$

初期値の分布が(484)式の場合、(487)式によって計算した
 $(\partial \eta / \partial t)_{t=0}$ の値に対して、中央差分および風上差分によって計算され
 た $(\partial \eta / \partial t)_{t=0}$ の値の標準偏差および相関係数を求める。この際(48
 7)式による解析解(DHA)、中央差分による解(DHC)および風上差
 分による解(DHU)は第483表に示す値である。従つて、標準偏差およ
 び相関係数は次の第484表のようになる。

第484表 中央差分および風上差分方式の標準偏差および相関係数

	差分方式	6×6 領域	11×11 領域	備 考
標準偏差	中央差分	1.055×10^{-11}	2.455×10^{-11}	$(\frac{\partial \eta}{\partial t})$ は 10^{-10} のオー ダ-である。
	風上差分	2.023×10^{-11}	2.677×10^{-11}	
相関係数	中央差分	0.9985	0.9982	
	風上差分	0.9832	0.9947	

第4.8.3表 正弦波状初期値分布の $t=0$ における各種差分方式の $(\frac{\partial \eta}{\partial t})_{t=0}$ の値 (11×11 領域)

DHC (I, J)

8.52-11	7.53-11	5.57-11	2.67-11	0	-2.67-11	-5.57-11	-7.53-11	-8.52-11
9.55-11	8.46-11	6.26-11	2.99-11	0	-2.99-11	-6.26-11	-8.26-11	-9.46-11
1.09-10	9.68-11	7.16-11	4.41-11	0	-3.41-11	-7.16-11	-9.68-11	-1.09-10
1.26-10	1.11-10	8.25-11	3.91-11	0	-3.91-11	-8.25-11	-1.11-10	-1.26-10
1.46-10	1.29-10	9.58-11	4.52-11	0	-4.52-11	-9.58-11	-1.29-10	-1.46-10
1.71-10	1.51-10	1.12-10	5.26-11	0	-5.26-11	-1.12-10	-1.51-10	-1.71-10
2.02-10	1.79-10	1.31-10	6.13-11	0	-6.13-11	-1.31-10	-1.79-10	-2.02-10
2.41-10	2.16-10	1.61-10	7.18-11	0	-7.18-11	-1.61-10	-2.16-10	-2.41-10
2.85-10	2.53-10	1.91-10	1.00-10	0	-1.00-10	-1.91-10	-2.53-10	-2.85-10

DHU (I, J)

8.52-11	7.53-11	5.02-11	2.01-11	-2.19-12	-3.33-11	-6.12-11	-7.53-11	-8.52-11
9.42-11	8.36-11	5.56-11	2.19-11	-2.56-12	-3.79-11	-6.97-11	-8.55-11	-9.68-11
1.08-10	9.58-11	6.34-11	2.48-11	-3.02-12	-4.35-11	-7.98-11	-9.78-11	-1.10-10
1.23-10	1.10-10	7.29-11	2.81-11	-3.61-12	-5.02-11	-9.21-11	-1.12-10	-1.27-10
1.44-10	1.28-10	8.43-11	3.18-11	-4.38-12	-5.85-11	-1.07-10	-1.30-10	-1.47-10
1.70-10	1.51-10	9.83-11	3.63-11	-5.39-12	-6.88-11	-1.25-10	-1.52-10	-1.72-10
2.01-10	1.79-10	1.15-10	4.15-11	-6.74-12	-8.11-11	-1.48-10	-1.79-10	-2.03-10
2.42-10	2.17-10	1.35-10	4.30-11	-4.73-12	-1.00-10	-1.86-10	-2.15-10	-2.41-10
2.85-10	2.50-10	1.68-10	7.76-11	-3.11-12	-1.23-10	-2.14-10	-2.56-10	-2.85-10

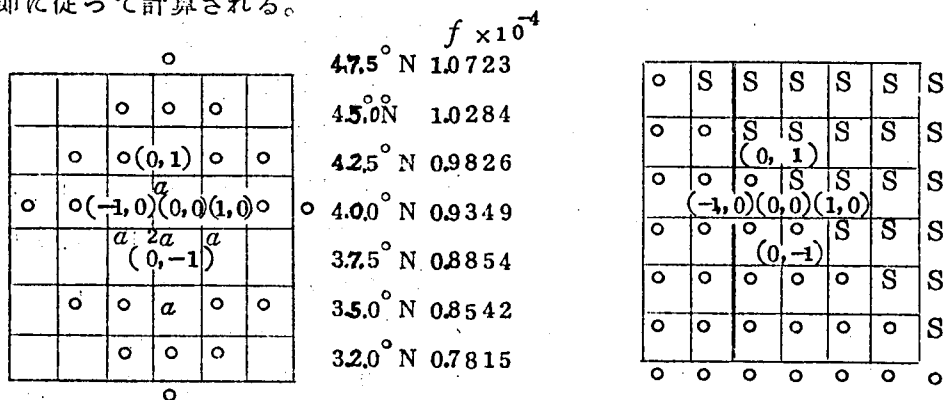
DHA (I, J)

6.43-11	5.43-11	3.93-11	2.06-11	0	-2.06-11	-3.93-11	-5.43-11	-6.43-11
7.38-11	6.23-11	4.50-11	2.36-11	0	-2.36-11	-4.50-11	-6.23-11	-7.38-11
8.53-11	7.20-11	5.20-11	2.72-11	0	-2.72-11	-5.20-11	-7.20-11	-8.53-11
9.94-11	8.38-11	6.05-11	3.16-11	0	-3.16-11	-6.05-11	-8.38-11	-9.94-11
1.17-10	9.86-11	7.11-11	3.72-11	0	-3.72-11	-7.11-11	-9.86-11	-1.17-10
1.39-10	1.17-10	8.44-11	4.41-11	0	-4.41-11	-8.44-11	-1.17-10	-1.39-10
1.68-10	1.41-10	1.01-10	5.30-11	0	-5.30-11	-1.01-10	-1.41-10	-1.68-10
2.05-10	1.72-10	1.23-10	6.46-11	0	-6.46-11	-1.23-10	-1.72-10	-2.05-10
2.55-10	2.14-10	1.53-10	8.00-11	0	-8.00-11	-1.53-10	-2.14-10	-2.55-10

第4.8.4表から標準偏差および相関係数とも、中央差分の方がよい値をもち近似度がよいことがわかる。しかし格子間隔を充分小さくとれば、渦度方程式を解くために、風上差分方式を用いて差支えない。例えば半波長が1500 Kmである(4.8.4)式の波に対しては、格子間隔が150 Kmである11×11領域を用いれば、風上差分方式を使って、中央差分方式と同程度の計算精度をうることができる。

4.9 5点領域における計算

この領域に対しては、前節第4.8.1図の初期値(a), (b)は不適當であるので第4.9.1図に示す初期値(d), (e)を用いた。初期値(d)は $Z_{0,0}$ において極大値をもつ錐面状に等圧面高度が分布しているものである。また初期値(e)は点(0, 0)を含み左上から右下に通る対角線を境として、左下の領域はすべて零メートルで、右上の領域はSメートルなる等圧面高度をもつ初期値分布である。この領域では、計算によって値が変化するのは(0, 0), (1, 0), (0, 1), (-1, 0)および(0, -1)の5点である。Zの $t > 0$ における値は第4.7節に従って計算される。



(d) $Z_{0,0}$ において極大値をもつ
錐面状初期値 $a > 0$

(e) ステップ状初期値

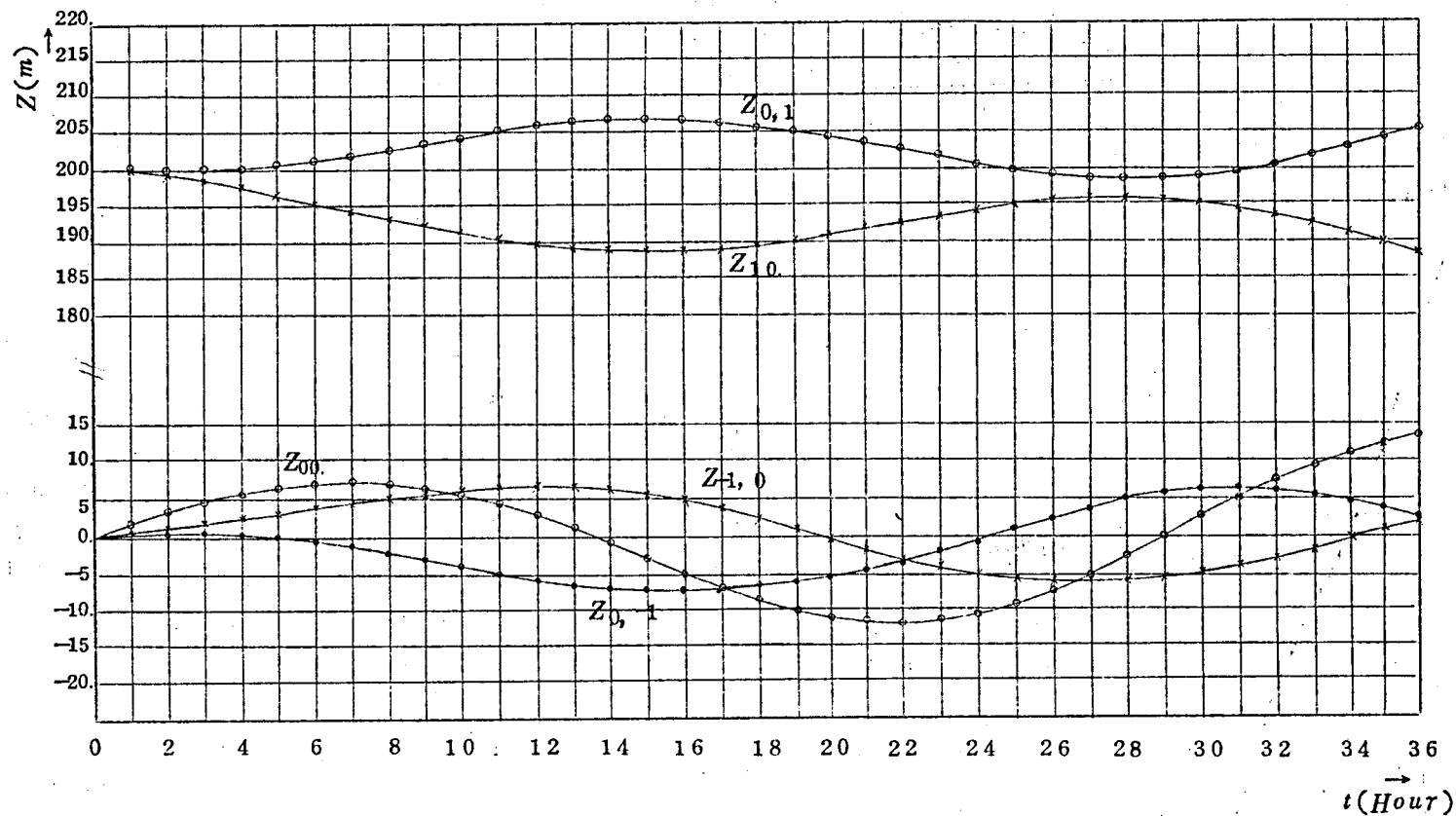
第4.9.1図 5点領域の計算に用いた初期値の分布

このときコリオリの因子 f をすべて等しいものと仮定すると、(d)、(e)の初期値分布における $(\partial\eta/\partial t)_{t=0}$ の値はすべての点で零になる。従って、この初期値について渦度方程式の逐次積分を行っても Z の値は変化しない。

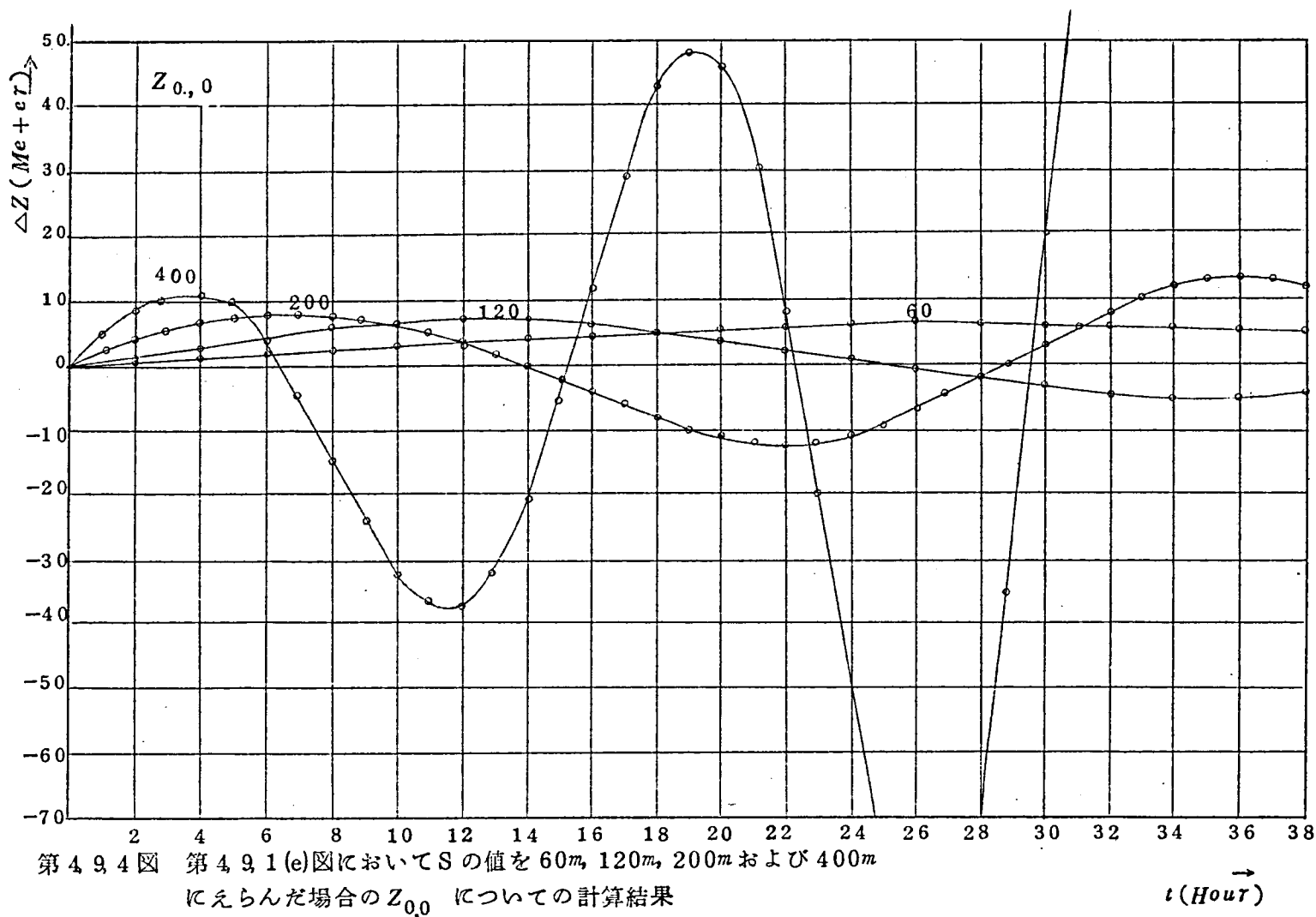
コリオリの因子 f を第 4.9.1 図に示したように与えると各点の計算値は時間に対して正弦波状に変化する。第 4.9.1 (d) の初期値において、(1) $a = 200$ m とした場合、および (2) $a = 100$ m とした場合の計算結果を第 4.9.2 図に示した。時間間隔 ΔT はともに 1 時間である。この図中実線は (1) の場合に対する各点の計算値である。破線は (2) の場合に対する各点の計算値である。この初期値分布に対しては、点 $(0, 0)$ における等圧面高度 $Z_{0,0}$ の値の変化は他の 4 点の Z の変化に比べてその振巾は小さく、初期値 $2a$ メートルの上下に変化している。 $Z_{1,0}$ と $Z_{-1,0}$ および $Z_{0,1}$ と $Z_{0,-1}$ の変化はそれぞれ対称的である。

(1) および (2) の場合に対する変化の模様を比較すると、両者は相似적である。しかし (2) の場合の最大振巾は (1) の場合の約 $1/3$ であって初期値 a の値に比例しない。一方、両者の波の対応する各点 (例えば、初期値を通る横軸を切る点) の間の時間は、(2) の場合は (1) の場合の 2 倍となっており、初期値 a の値の逆比になっている。従って、初期値の分布 (d) において、或範囲内で a の値を変化したとき、各格子点の等圧面高度の変化は相似적であって、その振巾および位相間には線形的な関係が成立つことが予想される。

次に第 4.9.1 (e) 図の初期値分布において $S = 200$ m とした場合の計算結果を第 4.9.3 図に示す。時間間隔 ΔT は 1 時間とした。時間間隔を 1 時間以下とした場合でも、計算値は余り異ならず、振巾が稍減少する。この例題においても $Z_{0,1}$ と $Z_{0,-1}$ および $Z_{-1,0}$ と $Z_{1,0}$ の初期値からの変化分は対称的に変動している。各格子点の変化波形の振巾は時間と共に次第に増大している。第 4.9.4 図は S の値を 60 m, 120 m, 200 m および 400 m にえらび $Z_{0,0}$ のそのときの計算値を示したものである。初期値 S の値が大きくなると、 $Z_{0,0}$ の値の変化は激しくなり、時間とともに発散する傾向を示している。



第 4 ・ 9 ・ 3 図 ステップ状初期値に対する，5点領域の計算値



t (Hour)

128 項欠

第2部 過度方程式のアナログ・シミュレーション

第2部 渦度方程式のアナログ・シミュレーション

アナログ計算機を用いて偏微分方程式を解くことは、従来、波動方程式、熱伝導方程式、梁の振動方程式等⁽³³⁾⁽³⁴⁾について行なわれている。渦度方程式もこれらの方程式と同様な方法を用いて解くことができる。アナログ計算機を用いて偏微分方程式を解くには、一般に偏微分方程式を差分近似によって差分方程式に変換し、連立常微分方程式に直して取扱う。こうすると、各種の境界条件を容易に設定でき、初期値問題等特定の問題に対応する解を求めうる。この方程式は、近似的なものであるので、近似度を高めようとすれば、それだけ、こまかい分割が必要になり、使用する演算器の数も莫大になる。二次元の渦度方程式の場合格子点一点当りに要する演算器の数を M とすれば、一辺 N 分割の正方形領域を計算するために必要な演算器の総数は $(N-1)^2 M$ となる。従って渦度方程式の場合も M を成可く少なくする工夫が必要である。渦度方程式のシミュレーションに於ては、ヤコビアン項の計算を能率よく実現することが問題となる。筆者はヤコビアン項の計算に、三角波の面積が高さの自乗に比例する原理を用いた $\frac{1}{4}$ 自乗掛算器を使用した。⁽⁴⁰⁾第5章においては、渦度方程式を等圧面高度 z および時間 t に関する差分方程式に変換する方法について説明し、差分微分方程式の安定度について考察する。

第6章ではポアッソンの方程式およびヤコビアンの式の計算回路について考察し、とくに後者の回路に用いる $\frac{1}{4}$ 自乗掛算器およびその誤差について述べる。第7章においては第6章にのべた計算回路にもとづいて模擬回路の構成をおこない、演算係数の選定について考察する。第8章では典型的な初期値に対する数値計算例について説明し、この場合に対するデジタル計算機による計算結果との比較を試みる。

第5章 渦度方程式の差分微分方程式

5.1 二次元の渦度方程式の差分微分方程式への変換

二次元の渦度方程式は第1章で求めた次の(1.2.9), (1.2.10)式である。

$$\eta = \frac{g}{f} \nabla^2 z + f \quad (1.2.9)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{g}{f} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial x} \right) \quad (1.2.10)$$

第5.1.1図のように x, y 軸を $\Delta x, \Delta y$ ごとに分割し、領域を x, y 軸に平行な格子でおおい、各格子点における η の値を $\eta_{i,j}$ とし、 z の値を $Z_{i,j}$ とする。これら $\eta_{i,j}, Z_{i,j}$ の値は x, y を固定して考えているから、時間 t のみの関数である。したがって i, j 番号の格子点における $(\partial \eta / \partial t)_{i,j}$ は、次のように常微分の形であらわすことができる。

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} \rightarrow \frac{d \eta_{i,j}}{d t}$$

以後、問題を簡単にするために、 $\Delta x = \Delta y = \Delta S$ とする。第2.1節でのべたように $\nabla^2 z$ は差分近似で次のように書ける。

$$(\nabla^2 Z)_{i,j} = \frac{1}{(\Delta S)^2} (Z_{i+1,j} + Z_{i,j+1} + Z_{i-1,j} + Z_{i,j-1} - 4Z_{i,j}) \quad (5.1.1)$$

地球の一部において、球面を平面とみなすと、 f は y のみの関数であるから、添字 j のみによって異なる常数である。(1.2.9), (1.2.10)式を差分を用いて表わすと

$$\eta_{i,j} = \frac{g}{f_j (\Delta S)^2} (Z_{i+1,j} + Z_{i,j+1} + Z_{i-1,j} + Z_{i,j-1} - 4Z_{i,j}) + f_j \quad (5.1.2)$$

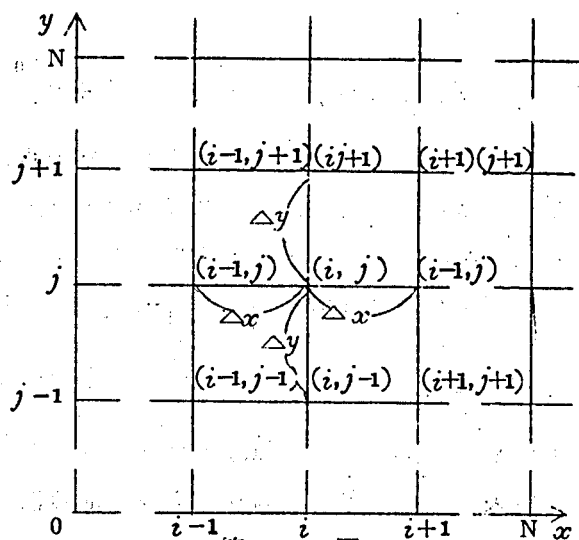
$$\frac{d \eta_{i,j}}{dt} = \frac{g}{f_j} \left(\frac{\eta_{i+1,j} - \eta_{i-1,j}}{2\Delta S} \frac{Z_{i,j+1} - Z_{i,j-1}}{2\Delta S} - \frac{\eta_{i,j+1} - \eta_{i,j-1}}{2\Delta S} \frac{Z_{i+1,j} - Z_{i-1,j}}{2\Delta S} \right) \quad (5.1.3)$$

(5.1.2), (5.1.3) 式を独立変数 t と従属変数 Z の式とするため (5.1.2) 式の $\eta_{i,j}$ を (5.1.3) 式に代入する。

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} (Z_{i+1,j} + Z_{i,j+1} + Z_{i-1,j} + Z_{i,j-1} - 4Z_{i,j}) \\ &= \frac{1}{4} \left\{ \frac{g}{f_j (\Delta S)^2} (Z_{i+2,j} + Z_{i+1,j+1} + Z_{i+1,j-1} - 4Z_{i+1,j} \right. \\ & \quad \left. - Z_{i-1,j+1} - Z_{i-2,j} - Z_{i-1,j-1} + 4Z_{i-1,j} \right. \\ & \quad \left. (Z_{i,j+1} - Z_{i,j-1}) \right. \\ & \quad - \left\{ \frac{g}{f_{j+1} (\Delta S)^2} (Z_{i+1,j+1} + Z_{i,j+2} + Z_{i-1,j+1} + Z_{i,j} \right. \\ & \quad \left. - 4Z_{i,j+1}) \right. \\ & \quad \left. - \frac{g}{f_{j-1} (\Delta S)^2} (Z_{i+1,j-1} + Z_{i,j} + Z_{i-1,j-1} + Z_{i,j-2} \right. \\ & \quad \left. - 4Z_{i,j-1}) \right\} (Z_{i+1,j} - Z_{i-1,j}) \Bigg\} \\ & \quad - \frac{1}{4} (f_{j+1} - f_{j-1}) (Z_{i+1,j} - Z_{i-1,j}) \quad (5.1.4) \end{aligned}$$

更に (5.1.4) 式を t について、0 から t まで積分して、積分の形で書直す。

このとき $Z_{i,j}, Z_{i+1,j}, Z_{i,j-1}, Z_{i-1,j}, Z_{i,j+1}$ の初期値をそれぞれ $+0, +0, +0, +0, +0$ $Z_{i,j}, Z_{i+1,j}, Z_{i,j-1}, Z_{i-1,j}$ および $Z_{i,j+1}$ と表わす。



(5. 1. 4) 式を積分して $Z_{i, j}$ について解くと次式をうる。

$$\begin{aligned}
 Z_{i, j} = & -\frac{1}{16} \int \left\{ \frac{g}{f_i(\Delta S)^2} (Z_{i+2, j} + Z_{i+1, j+1} + Z_{i+1, j-1} \right. \\
 & - 4Z_{i+1, j} - Z_{i-1, j+1} - Z_{i-2, j} \\
 & - Z_{i-1, j-1} + 4Z_{i-1, j}) \\
 & (Z_{i, j+1} - Z_{i, j-1}) \\
 & - \left\{ \frac{g}{f_{j+1}(\Delta S)^2} (Z_{i+1, j+1} + Z_{i, j+2} + Z_{i-1, j+1} \right. \\
 & + Z_{i, j} - 4Z_{i, j+1}) \\
 & - \frac{g}{f_{j-1}(\Delta S)^2} (Z_{i+1, j-1} + Z_{i, j} + Z_{i-1, j-1} \\
 & + Z_{i, j-2} - 4Z_{i, j-1}) \} \\
 & \times (Z_{i+1, j} - Z_{i-1, j}) \Big\} dt \\
 & + \frac{1}{16} \int (f_{j+1} - f_{j-1}) (Z_{i+1, j} - Z_{i-1, j}) dt \\
 & + \frac{1}{4} (Z_{i+1, j} + Z_{i, j+1} + Z_{i-1, j} + Z_{i, j-1})
 \end{aligned}$$

の形に書き改めることは一般には不可能であって、このようなときには、

(5.2.1)式をつぎのように表す。

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= g_1 \left(\frac{dy_1}{dt}, \frac{dy_2}{dt}, \dots, \frac{dy_n}{dt}, y_1, y_2, \dots, y_n; t \right) \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{dy_n}{dt} &= g_n \left(\frac{dy_1}{dt}, \frac{dy_2}{dt}, \dots, \frac{dy_n}{dt}, y_1, y_2, \dots, y_n; t \right) \end{aligned} \right\}$$

(5.2.3)

(5.2.3)式によって、演算回路をつくると、このとき多重帰還路を有する回路網が安定であるためには、アナログ計算機の解法における場合には、とくにもとの方程式に対する演算回路が独立に安定条件を満している必要がある。これは各minorループが独立にそれぞれ安定条件を満足していなければならないことを意味している。(5.3.2)式の連立常微分方程式の解法における安定条件はつぎの式で与えられる。すなわち、各minorループが安定であるためには、

$$\frac{\frac{\partial g_i}{\partial y_i}}{\frac{\partial}{\partial t}} < 1 \quad ; i=1, 2, \dots, n \quad (5.2.4)$$

さらに、全体の演算回路が安定であるためには、(5.2.4)式が成立したものとして、

$$\frac{\frac{\partial g_i}{\partial y_i}}{\frac{\partial}{\partial t}} + \sum_{j \neq i} \frac{\frac{\partial g_i}{\partial y_j} \cdot \frac{\partial g_j}{\partial y_i}}{\frac{\partial}{\partial t}} \cdot \frac{\frac{\partial g_j}{\partial y_j}}{1 - \frac{\partial g_j}{\partial y_j}} < 1, \quad i=1, 2, \dots, n \quad (5.2.5)$$

が成立することである。故に(5.2.1)式を(5.2.2)式のように表わせるならば、

$$\frac{\partial \theta_i}{\partial \left(\frac{dy_i}{dt}\right)} = \frac{\partial \theta_i}{\partial \left(\frac{dy_i}{dt}\right)} = 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (5.2.6)$$

が常に成立するから、回路はすべて安定である。(33)

渦度方程式を常微分方程式に変換した、(5.1.4)式は、格子点5つを変数とした場合五元連立一次方程式となる。

$$\frac{dZ_{i,j}}{dt} = -R_{i,j} + \frac{1}{4} \left\{ \frac{dZ_{i+1,j}}{dt} + \frac{dZ_{i,j+1}}{dt} + \frac{dZ_{i-1,j}}{dt} + \frac{dZ_{i,j-1}}{dt} \right\} \quad (5.2.7)$$

ここに、 $i, j = \pm 1, 0$ であって、 $R_{i,j}$ は(5.1.4)式の右辺を表す。

(5.2.7)式において、(5.2.5)式の偏微分項に当る値は

$$\frac{\partial \theta_i}{\partial \left(\frac{dy_i}{dt}\right)} = 0, \quad \frac{\partial \theta_i}{\partial \left(\frac{dy_i}{dt}\right)} = \frac{\partial \theta_i}{\partial \left(\frac{dy_i}{dt}\right)} = \frac{1}{4}, \quad i, j = 1 \sim 5 \quad (5.2.8)$$

となる。従って、この場合に、(5.2.5)式左辺の値は $\frac{1}{4}$ となり安定条件を満足する。一般に $n \times n$ 格子点についてもこのことは成立するから、(5.1.4)式による回路は安定である。

第6章 ポアッソンの方程式およびヤコビアンの方式の 計算回路

6.1 ポアッソンの方程式およびヤコビアンの方式の計算回路

二次元のラプラスの方程式の境界値問題をアナログ計算機を用いて解く方法としては、 y 軸を Δy ごとに n 分割して x 軸を時間軸にえらんで解く方法が発表されている。⁽³⁵⁾ しかしながら、この方法は $t=0$ における微係数を決定することが出来ず、カット・アンド・トライでえらばなければならない。又ポアッソンの方程式には適用出来ない。ここでは x 軸および y 軸を、共に n 分割して、各格子点において差分方程式を満足するように回路を構成する方法について述べる。

二次元のポアッソンの方程式を

$$-\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = -\rho(x, y), \quad (x, y) \in R \quad (6.1.1)$$

とする。この式を次の境界条件の下でとく

$$\phi(x, y) = \tau(x, y), \quad (x, y) \in T \quad (6.1.2)$$

ここで R は領域、 T は境界とする。第 6.1.1 図のように、長方形領域を考え、格子間隔を $\Delta x = \Delta y = \Delta s$ とえらぶ。このとき (6.1.1) 式は、すでに述べたところによつて、つぎの差分近似式で表わされる。格子点 (i, j) に対して

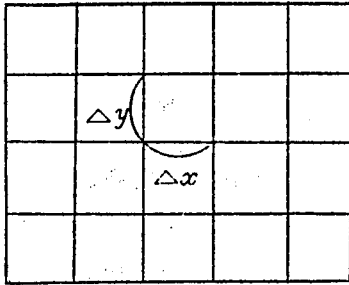
$$\frac{\phi_{i+1, j} + \phi_{i-1, j} + \phi_{i, j+1} + \phi_{i, j-1} - 4\phi_{i, j}}{\Delta s^2} = -\rho_{i, j} \quad (6.1.3)$$

$(x, y) \in \bar{R}_h$

$$\phi_{i, j} = \tau(i, j), \quad (x, y) \in R_h$$

となる。 R_h は格子網の境界、 \bar{R}_h はこの近似境界で囲まれた領域である。

(6.1.3) 式の計算は第 6.1.2 図のような回路を、各格子点について構成すれば遂行される。この方式の欠点は領域の分割数が増すと必要な加算器の数が増大することである。これに対し各格子点の符号を一つおきに交互に、正負をとるものと仮定し、これに応じた初期値および境界値を用いれば、各



第 6. 1. 1 図

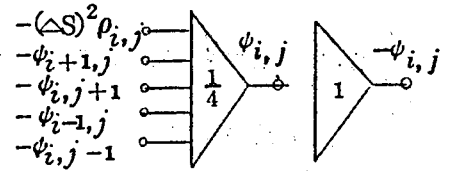
$$-(\Delta S)^2 \rho_{i,j}$$

$$-\psi_{i+j,j}$$

$$-\psi_{i,j+1}$$

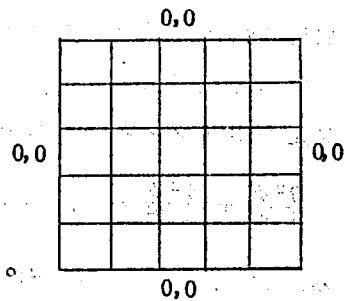
$$-\psi_{i-1,j}$$

$$-\psi_{i,j-1}$$



第 6. 1. 2 図

格子点当り必要とする加算器の数は 1 台でよいから、上の欠点は稍軽減することができる。単位正方形領域を 5×5 分割して第 6. 1. 3 図のような境界値を与えた場合、解は第 6. 1. 4 (a) 図のようになる。第 6. 1. 4 図 (b) はデジタル計算機による解を示す。この結果からデジタル計算機の解に対する相対誤差の平均は 6. 1 2 8 % である。



第 6. 1. 3 図

(a) アナログ計算機の解

	0.0	0.0	0.0	0.0	
0.0	-0.0425	-0.066	-0.069	-0.044	0.0
0.0	-0.104	0.150	0.150	0.107	0.0
0.0	-0.205	0.305	0.310	0.200	0.0
0.0	-0.440	0.568	0.568	0.440	0.0
	1.0	1.0	1.0	1.0	

(b) デジタル計算機による解

	0.0	0.0	0.0	0.0	
0.0	-0.0455	0.072	0.072	0.0455	0.0
0.0	-0.1098	0.170	0.170	0.1098	0.0
0.0	-0.2234	0.3295	0.3295	0.2234	0.0
0.0	-0.4545	0.5946	0.5946	0.4545	0.0
	1.0	1.0	1.0	1.0	

第 6. 1. 4 図 第 6. 1. 3 図の初期値に対する $\nabla^2 \varphi = 0$ の解

6.2 1/4 自乗掛算器

二つの数 X , Y を乗する際に次の数学的関係を利用する方式を 1/4 自乗掛算方式という。

$$XY = \frac{1}{4} \{ (X+Y)^2 - (X-Y)^2 \} \quad (6.2.1)$$

ここでアナログ要素としては、自乗回路が必要になり、色々な方式が試みられている。^(34, 36) 自乗回路の形成法により実用化されている $1/4$ 自乗方式を分類するとつぎの三種類となる。

- (i) 真空管等の自乗特性によるもの。
- (ii) 関数発生器を利用するもの。
- (iii) 三角波電圧の面積がその高さの自乗に比例することを利用するもの。

(i)の方法は真空管の非線型特性を使うため信頼度が低く、(ii)の方法は二つの関数発生器を使うため装置が複雑になる。(iii)の方法はダイオードの特性および三角波の波形に精度が依存するが、三角波の波形が正しいならば回路の構成は簡単で比較的高精度の掛算器を得ることが期待できる。三角波電圧の面積がその高さの自乗に比例する原理を用いた掛算器は低速型および繰返型アナログ計算機に使用することが出来、且信頼度が高い。繰返型アナログ計算機に使用するとき、使用する三角波の周波数に対し、演算周波数には限度があり、三角波の周波数は演算周波数および精度によつて定められる。 f を入力周波数、 f_0 を三角波の周波数、 E を正弦波入力電圧の最大値、 A を三角波の最大波高値とすると精度 ϵ は次式で与えられる。⁽³⁶⁾ただしこゝで、三角波は二等辺三角波とする。

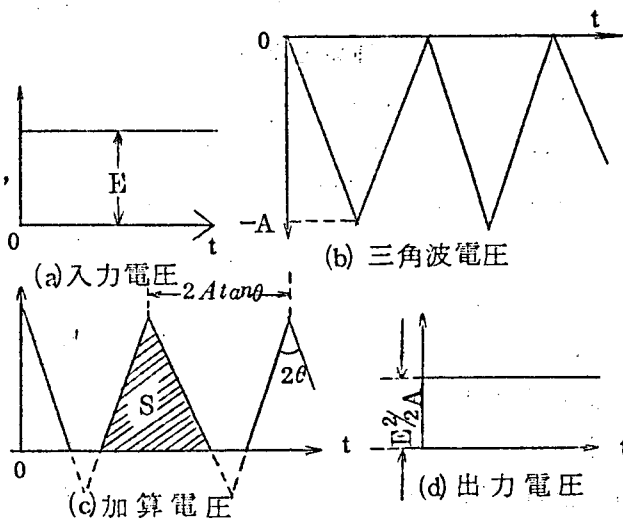
$$\epsilon = \frac{2\pi^2}{3} \left(\frac{E}{A}\right)^2 \left(\frac{f}{f_0}\right)^2 = 6.57 \left(\frac{E}{A}\right)^2 \left(\frac{f}{f_0}\right)^2 \quad (6.2.2)$$

(6.2.2)式から、低速形アナログ計算機に三角波電圧の面積がその高さの自乗に比例する原理を用いた掛算器(以下、三角波 $1/4$ 自乗掛算器とよぶ)を使用するとき、入力周波数 f は高々数 c/s であるから、三角波の周波数 f_0 を数百%から $1\text{ KC}/s$ 程度にえらぶことによつて、この ϵ の値は非常に小さくなり無視出来る。

つぎに二等辺三角波による自乗特性を第 6.2.1 図によつて説明する。(a)図の入力電圧 E に(b)図のような三角電圧を加え合わせると、(c)図に示す電圧となる。この電圧の斜線部分の面積 S は、三角波の頂角を 2θ (一定)とすれば、 $E^2 \tan \theta$ となる。(c)図の電圧の正の電圧のみを検波整流しその直流分のみをとれば、(d)図に示す $E^2/2.4$ なる直流電圧をうる。従つて入力電圧の自乗に比例する電圧が得られる。

次に三角波電圧として第 6.2.2 図(b)のような三角波電圧(半波高値が A)を同(a)図の入力電圧($X + Y$)に加えると(c)図のような加算電圧が得られる。斜線部分の面積 S は、 $(A + X + Y)^2 \tan \theta$

である。この(c)図の電圧を検波整流して正の直流電圧を求めると(d)図に示す $(A + X + Y)^2 / 4A$ の直流出力電圧をうる。

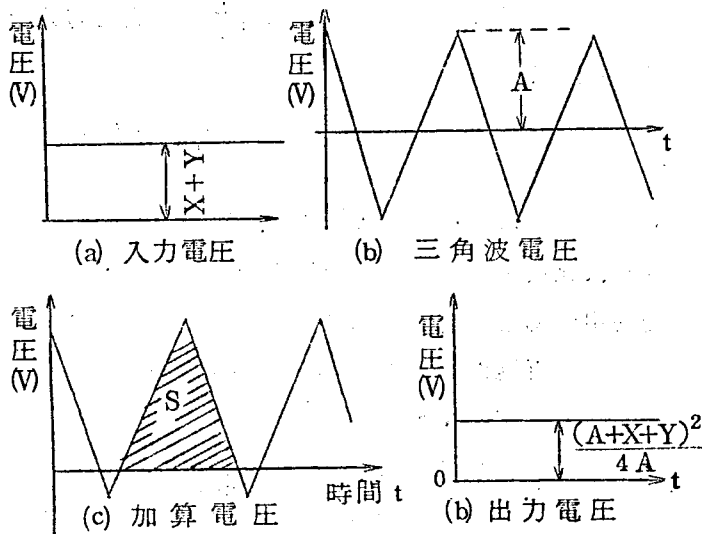


第 6.2.2 図(d)の出力電圧をうる回路を用いると、1/8 自乗掛算器が構成出来る。この方式の原理はつぎの(6.2.3)式の関係に従うものである。

第 6.2.1 図 三角波による自乗回路の動作原理

$$XY = \frac{1}{8} \{ (A + X + Y)^2 + (A - X - Y)^2 - (A + X - Y)^2 - (A - X + Y)^2 \} \quad (6.2.3)$$

(6.2.3) 式に従う三角波 1/8 自乗掛算器の回路は第 6.2.3 図のようになる。チャンネル(I), (II) は(6.2.3)式右辺の第



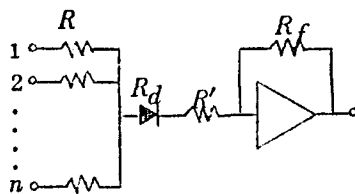
第 6.2.2 図 電位零点をシフトしない三角波による自乗回路の動作原理

1 項および第 2 項の自乗出力を与える。(III) は第 4 項の自乗出力を与え、チャンネル(IV) は第 3 項の自乗出力を与える回路である。このことは、6.2.3 図の a,

第 6.2.3 図において，回路の利得 k は演算抵抗 R ， R' ，帰還抵抗 R_f およびダイオードの順方向抵抗 R_d によつて定まる。従つて，第 6.2.5 図のような回路を考えた場合この回路の順方向の利得は，一般に

$$k = \frac{1}{n(R_d + R') + R}$$

となる。次節において R_d にもとづく演算誤差を考察する。



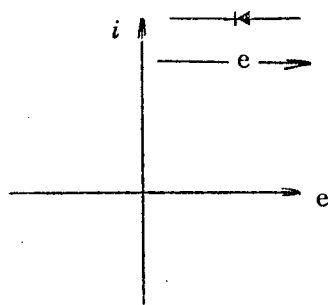
第 6.2.5 図

6.3 1/4 自乗掛算器の誤差

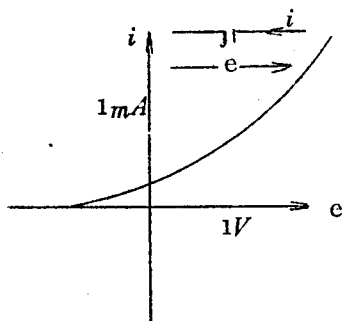
三角波 1/4 自乗掛算器の誤差のうち，入力電圧の周波数と三角波の周波数との関係にもとづく出力電圧誤差，位相遅れについては，すでに解析されている。⁽³⁶⁾ 渦度方程式のシミュレーションにおいては，1/4 自乗掛算器の入力周波数はきわめて低く，たかだか 1/10 % 程度であるから，三角波の周波数を 1 Kc 程度に採れば，動的な誤差は問題にならない。こゝでは静的誤差のうち，ダイオードの非直線特性にもとづく誤差について解析する。

6.3.1 ダイオードの電圧電流特性

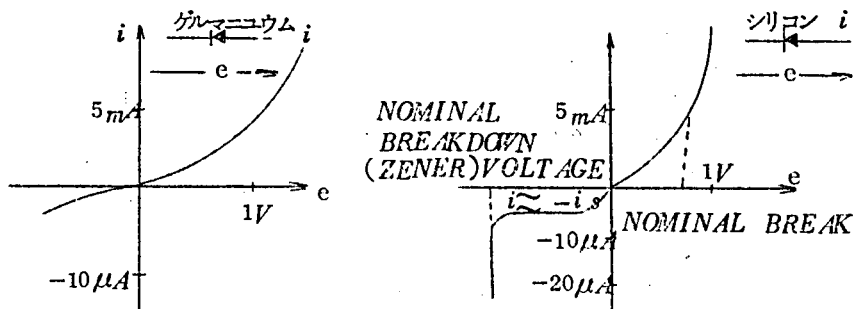
ダイオードの特性としては，第 6.3.1 図(a)の理想特性が望まれる。しかし実際に得られるダイオードは同図(b)，(c)，(d)に示す特性である。⁽³⁷⁾ 二極真



(a) 理想特性



(b) 真空管ダイオードの特性



(c) ゲルマニウム、ダイオードの特性

(d) シリコン、ダイオードの特性

第 6.3.1 図 各種ダイオードの特性曲線

空管と半導体ダイオードは有限の順方向抵抗および逆方向抵抗が存在する。加えて、二極真空管では逆方向に電圧を加えても、或電圧までは、Schottky 効果によつて順方向電流が流れる。シリコン接合型ダイオードの順方向電圧 e と電流 i との特性は次式で与えられている。⁽³⁷⁾

$$i = i_s (\text{EXP} \cdot \frac{q}{KT} - e^{-1}), (e > -e_B) \quad (6.3.1)$$

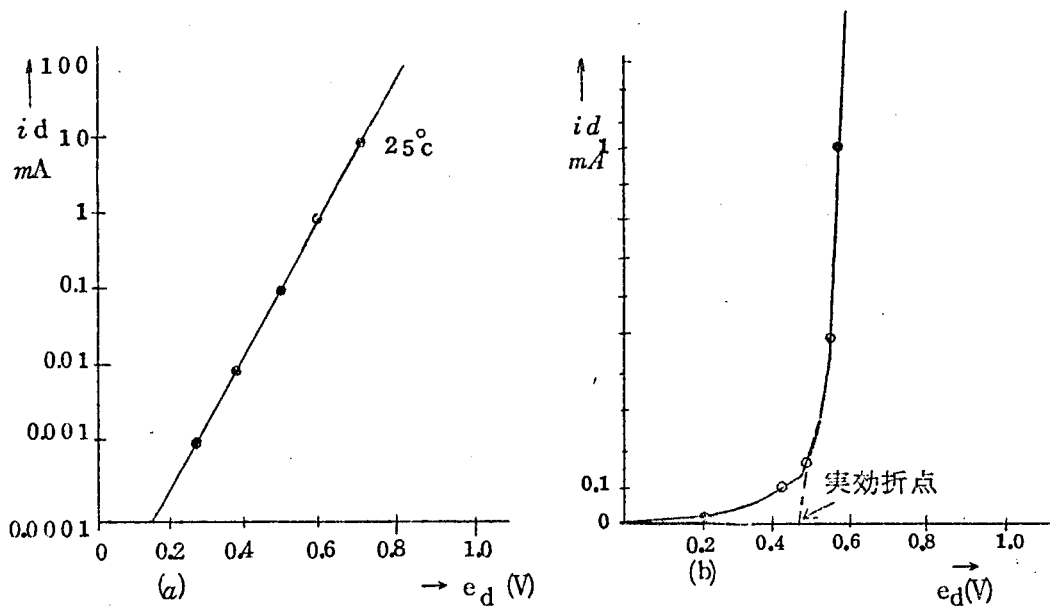
ここで i_s は逆方向飽和電流、 e_B は逆方向絶縁破壊電圧を示し、 KT/q は室温 (25℃) において約 0.026 Volts の常数である。第 6.3.1 図の各ダイオードの特性を見ると、シリコンダイオードが最も理想特性に近いと考えられる。このため第 6.2.3 図の回路にはシリコンダイオードを使用した。

シリコンダイオード NEC, SD103 の順方向特性の測定結果を第 6.3.2 図に示す。(a) は電流軸を対数目盛としたもの、(b) は実数目盛としたものである。

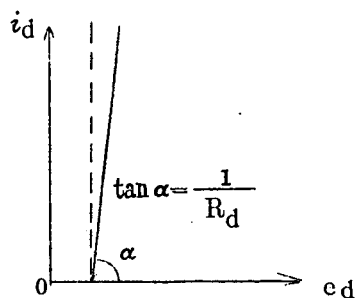
6.3.2 ダイオードの特性にもとづく 1/4 自乗掛算器の誤差

第 6.2.3 図に示した 1/4 自乗掛算器のシリコン・ダイオードの特性にもとづく誤差を考える。第 6.3.1 (d) 図に示したシリコン・ダイオードの特性曲線を第 6.3.3 図のような直線で近似する。このように近似するとダイオードの端子電圧 e_d と電流 i_d との関係は $e_d \geq e_s$ になるとき次式で近似できる。

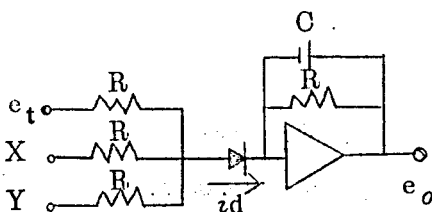
$$i_d = \frac{1}{R_d} (e_d - e_s) \quad (6.3.2)$$



第 6.3.2 図 シリコンダイオード SD103 の順方向特性



第 6.3.3 図 シリコンダイオードの特性近似曲線



第 6.3.4 図 $\frac{1}{4}$ 自乗掛算器の要素
正の半波の自乗回路

ここに e_s は第 6.3.3 図における実効折点電圧（スイッチング電圧）である。まづ第 6.3.4 図に示す $1/4$ 自乗掛算器の一要素について考える。このとき、ダイオードが非導通状態にあるときは次式が成立する

$$\frac{e_t - e_d}{R} + \frac{X - e_d}{R} + \frac{Y - e_d}{R} = 0 \quad (6.3.3)$$

或いは,

$$3e_d = e_t + X + Y \quad (6.3.3')$$

導通状態におけるダイオードの電流 i_d は

$$i_d = \frac{e_t + X + Y - e_d}{R} \quad (6.3.4)$$

となる。ここでダイオードの内部抵抗は R にくらべて非常に小さいとして無視している。(6.3.2)式により

$$e_d = R_d i_d + e_s \quad (6.3.5)$$

であるから、この e_d の値を(6.3.4)式に代入し、 i_d の値を求めると次式をうる。

$$i_d = \frac{e_t + X + Y - e_s}{R(1 + \frac{R_d}{R})} \quad (6.3.6)$$

出力電圧 e_o は $-i_d R$ であるから、

$$e_o = -\frac{e_t + X + Y - e_s}{(1 + \frac{R_d}{R})} \quad (6.3.7)$$

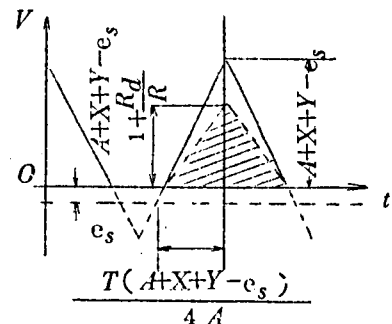
となる。 e_t を最大波高値 A なる三角波電圧とすると、このときの出力波形は、第6.3.5図の破線のようになる。一方実線で示した波形は第6.3.3図の破線で示した特性をもつものとダイオードを考えた場合の波形であつて、この際出力電圧 e_o は(6.3.7)式で $R_d = 0$ としたものに当る。増巾器の出力の平均電圧 \bar{e}_o は図の斜線部分の面積を一周期について平均したものである。従つて \bar{e}_o は

$$\bar{e}_o = \frac{(A + X + Y - e_s)^2}{4A(1 + \frac{R_d}{R})} \quad (6.3.8)$$

(6.3.8)式によつて求まる出力平均電圧は $R_d = 0$ とした場合の

$$\frac{1}{(1 + \frac{R_d}{R})}$$

で与えられる。すなわちこれだけ利得が減少することを示している。



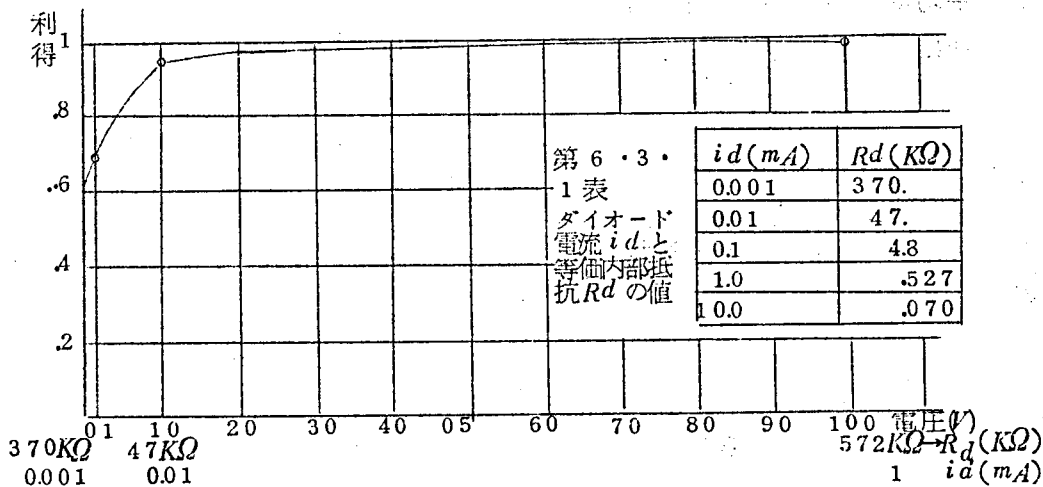
第6.3.5図 出力波形

シリコンダイオードSD-103の場合，等価内部抵抗 R_d の値はダイオードに流れる電流 i_d が変化するとき第6.3.1表および第6.3.6図のように変化している。(6.3.8)式から R_d の値が R に比べて無視出来ない程度に大きくなると，利得が減少するから，演算単位電圧および抵抗 R の値をえらぶ際には，動作点がダイオードの i_d-e_d 特性および， R_d-i_d 特性および， R_d-i_d 特性の直線部分を占めるようにしなければならない。

今 $(A+X+Y)$ の最大値を100Vとし， $e_s=0.25V$ とする。このときダイオードを流れる電流 i_d を $A+X+Y-e_s/R$ で近似し， $(A+X+Y)$ を0.25Vから100Vまで変化させたときの利得 $1/(1+\frac{R_d}{R})$ を計算すると第6.3.6図のようになる。ここで R_d の値を第6.3.2図から求めると第6.3.1表のようになる。第6.2.3図の1/4自乗掛算器の回路において $R'=0$ とした場合，出力電圧の平均値 e_o はつぎのようになる。

$$e_o = -\frac{1}{4A(1+\frac{R_d}{R})} \{ (A+X+Y-e_{s1})^2 (A-X-Y-e_{s2})^2 - (A-X+Y-e_{s3})^2 - (A+X-Y-e_{s4})^2 \}$$

$$= -\frac{1}{4A(1+\frac{R_d}{R})} \{ (A+X+Y)^2 + (A-X-Y)^2 - (A-X+Y)^2 - 2A(e_{s1}+e_{s2}-e_{s3}-e_{s4}) - 2X(e_{s1}-e_{s2}+e_{s3}-e_{s4}) - 2Y(e_{s1}-e_{s2}-e_{s3}+e_{s4}) + (e_{s1}^2+e_{s2}^2-e_{s3}^2-e_{s4}^2) \} \quad (6.3.9)$$



第6.3.6図 演算抵抗が100KΩのときのダイオードの内部抵抗 R_d に対する利得

e_s の値は通常 $0.25V$ であるから、 e_s の自乗の項は無視出来る。上式中 e_s の添字は各チャネルの e_s の値である。

この式からすべてのダイオードのスイッチ電圧 e_s がひとしければ、 e_s の値が零でないことにもとづく誤差は消滅する。残された誤差はダイオードの端子電圧が電流によつて変化するため、等価内部抵抗によるものであつて、これによる誤差は除去出来ない。第 6.3.2 (b) 図において、 $R=100K\Omega$ 、 $(A+X+Y)=100V$ とした場合 R_d は約 100Ω であるので、 R_d にもとづく利得の低下は約 0.1% である。

6.4 ヤコビアン の計算回路

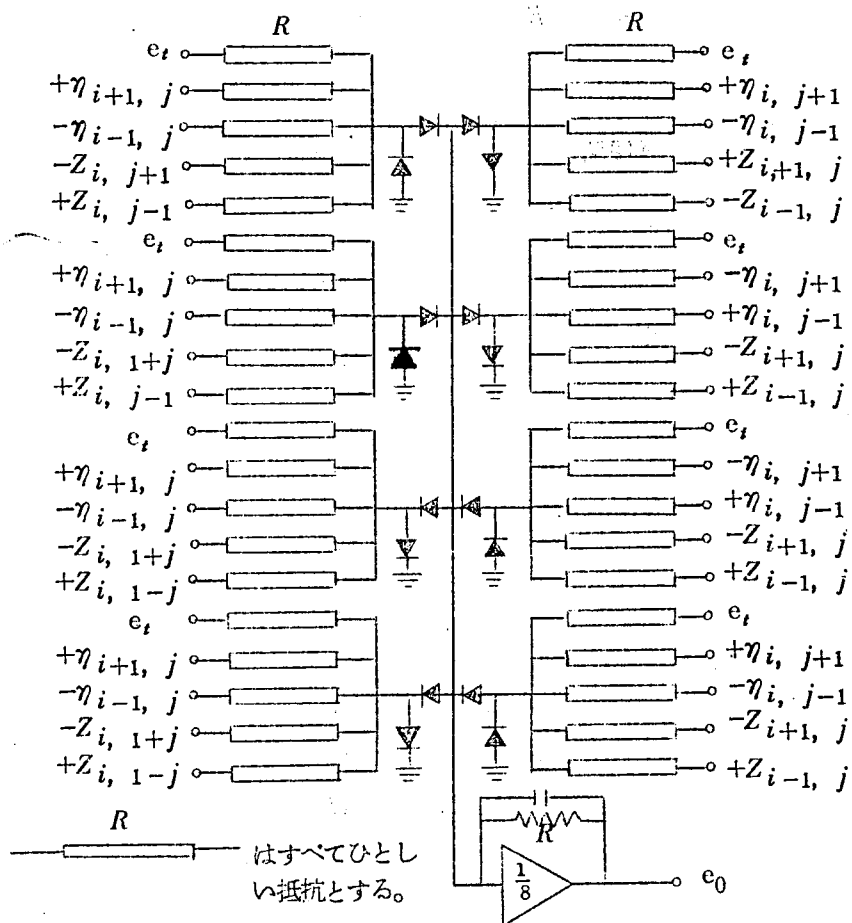
(1.2.10) 式の右辺を $1/4$ 自乗掛算方式によつて計算する回路について考察する。

$$\frac{\partial \eta}{\partial i} = \frac{g}{f} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial x} \right) \quad (1.2.10)$$

(1.2.10) 式右辺の偏微分項を中央差分によつて近似し、(6.2.3) 式にかき表わすと次式をうる。

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(2\Delta S)^2} \{ (\eta_{i+1,j} - \eta_{i-1,j})(Z_{i,j+1} - Z_{i,j-1}) - (\eta_{i,j+1} - \eta_{i,j-1})(Z_{i+1,j} - Z_{i-1,j}) \} \\ &= \frac{1}{8(\Delta S)^2} \{ (A + \eta_{i+1,j} - \eta_{i-1,j} + Z_{i,j+1} - Z_{i,j-1})^2 \\ & \quad + (A - \eta_{i+1,j} + \eta_{i-1,j} - Z_{i,j+1} + Z_{i,j-1})^2 \\ & \quad - (A + \eta_{i+1,j} - \eta_{i-1,j} - Z_{i,j+1} + Z_{i,j-1})^2 \\ & \quad - (A - \eta_{i+1,j} + \eta_{i-1,j} + Z_{i,j+1} - Z_{i,j-1})^2 \\ & \quad - (A + \eta_{i,j+1} - \eta_{i,j-1} + Z_{i+1,j} - Z_{i-1,j})^2 \\ & \quad - (A - \eta_{i,j+1} + \eta_{i,j-1} - Z_{i+1,j} + Z_{i-1,j})^2 \\ & \quad - (A - \eta_{i,j+1} + \eta_{i,j-1} + Z_{i+1,j} - Z_{i-1,j})^2 \\ & \quad + (A + \eta_{i,j+1} - \eta_{i,j-1} - Z_{i+1,j} + Z_{i-1,j})^2 \} \end{aligned} \quad (6.4.1)$$

ここで η は (5.1.2) 式によつて Z と f の関数として表わすことができるから、(6.4.1) 式は波高値 A なる三角波を使用した第 6.4.1 図の回路によつて計算することができる。



第 6. 4. 1 図 中央差分によるヤコビアン項の計算回路

次に η と Z との格子点の符号を予め第 6.4.2 図のように定めて, η と Z の x と y に関する偏微分を (6.4.2) 式のように近似した場合を考える。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial x} &= \frac{1}{\Delta S} (\eta_{i+1, j} - \eta_{i, j}); \quad \frac{\partial Z}{\partial y} = \frac{1}{\Delta S} (Z_{i, j} - Z_{i, j-1}) \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} &= \frac{1}{\Delta S} (\eta_{i-1, j} - \eta_{i, j}); \quad \frac{\partial Z}{\partial y} = \frac{1}{\Delta S} (Z_{i, j} - Z_{i, j+1}) \\ \frac{\partial \eta}{\partial y} &= \frac{1}{\Delta S} (\eta_{i, j+1} - \eta_{i, j}); \quad \frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{1}{\Delta S} (Z_{i, j} - Z_{i-1, j}) \\ -\frac{\partial \eta}{\partial y} &= \frac{1}{\Delta S} (\eta_{i, j-1} - \eta_{i, j}); \quad -\frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{1}{\Delta S} (Z_{i, j} - Z_{i+1, j}) \end{aligned}$$

-	+	-	+	-	+	-
+	-	+	-	+	-	+
-	+	-	+	-	+	-
+	-	+	-	(i, j)	+	-
-	+	-	+	-	+	-
+	-	+	-	+	-	+

(a) Z 領域

+	-	+	-	+	-	+
-	+	-	+	-	+	-
+	-	+	-	+	-	+
-	+	-	+	(i, j)	-	+
+	-	+	-	+	-	+
-	+	-	+	-	+	-

(b) η 領域

第 6.4.2 図 片側差分近似によつてヤコビアン項を計算するための Z と η の格子点の符号

$\frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial Z}{\partial y}$ を (6.2.3) 式によつて計算するものとし, (6.4.2) 式の近似を用いると, つぎのようになる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial Z}{\partial y} &= \frac{1}{8} \left\{ (A + \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial Z}{\partial y})^2 + (A - \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial Z}{\partial y})^2 \right. \\ &\quad \left. - (A + \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial Z}{\partial y})^2 - (A - \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial Z}{\partial y})^2 \right\} \\ &= \frac{1}{8(\Delta S)^2} \left\{ (A + \eta_{i+1, j} + Z_{i, j} - Z_{i, j-1})^2 + (A + \eta_{i-1, j} + Z_{i, j} - Z_{i, j+1})^2 \right. \\ &\quad \left. - (A + \eta_{i+1, j} - Z_{i, j} + Z_{i, j+1})^2 - (A + \eta_{i-1, j} - Z_{i, j} + Z_{i, j-1})^2 \right\} \\ &= \frac{1}{4(\Delta S)^2} (\eta_{i+1, j} - \eta_{i-1, j})(Z_{i, j+1} - Z_{i, j-1}) \quad (6.4.3) \end{aligned}$$

同様にして $-\frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial Z}{\partial x}$ は

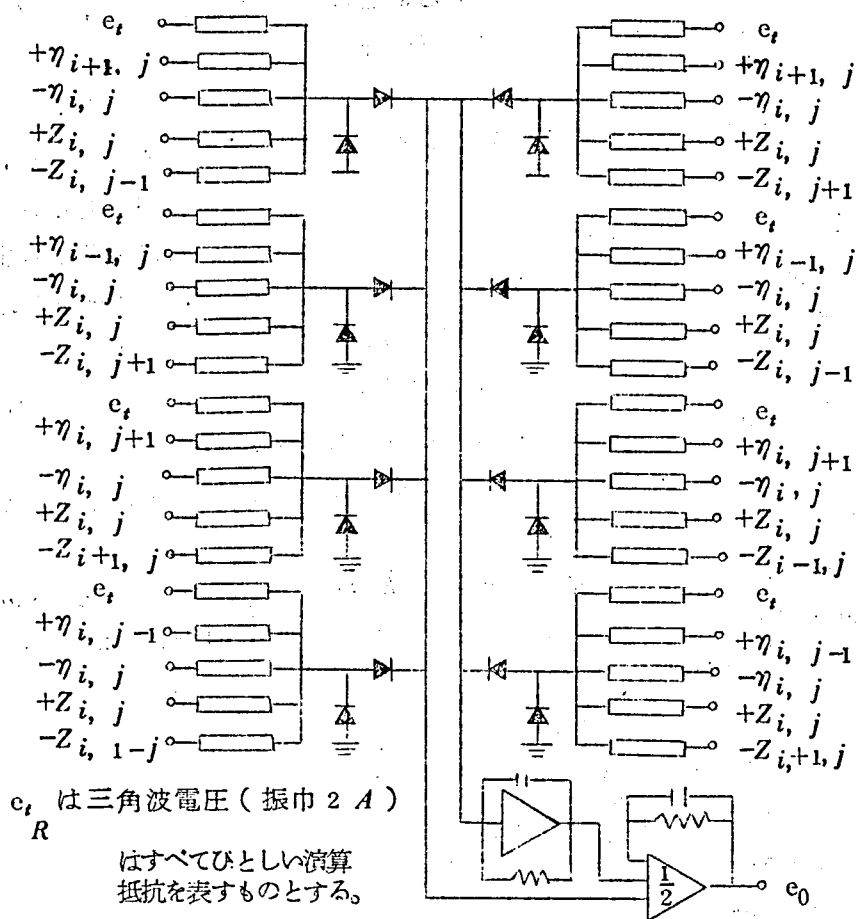
$$\begin{aligned}
-\frac{\partial \eta}{\partial v} \frac{\partial Z}{\partial z} &= \frac{1}{8(\Delta S)^2} \{ (A+\eta_{i,j+1}-\eta_{i,j}+Z_{i,j}-Z_{i-1,j})^2 - (A+\eta_{i,j-1}-\eta_{i,j}+Z_{i,j}-Z_{i+1,j})^2 \\
&\quad + (A+\eta_{i,j+1}-\eta_{i,j}+Z_{i,j}-Z_{i+1,j})^2 + (A+\eta_{i,j-1}-\eta_{i,j}+Z_{i,j}-Z_{i-1,j})^2 \} \\
&= \frac{1}{4(\Delta S)^2} (\eta_{i,j+1}-\eta_{i,j-1})(Z_{i+1,j}-Z_{i-1,j}) \quad (6.4.4)
\end{aligned}$$

となる。この結果第 6.4.2 図のように格子点の符号を定めて、(6.4.2)式の近似を用いた場合、掛算の結果は中央差分によるものと等価となることがわかる。

片側差分を組合せた(6.4.3)および(6.4.4)式に従うヤコビアン項の計算回路を第 6.4.3 図に示す。この回路で注意すべき点は、自乗出力が負号をもつ項を構成するものである。中央差分の場合は正負の差分量の絶対値がひとしいので、6.2 節でのべたように(6.2.3)式の右辺第 3 項および第 4 項を第 6.2.3 図のチャンネルⅣおよびチャンネルⅢによつて実現できる。しかし(6.4.3)、(6.4.4)式の場合には、一般に正負の差分量の絶対値がひとしくない。このために負号をもつ自乗出力の項は正電圧を検波整流して平均した後に極性を反転しなければならない。或は入力として差分量の符号を反転したものを加えて、三角波の負電圧を検波整流しなければならない。いずれにしても符号反転のために増巾器が、各格子点について一台必要となる。従つて片側差分方式をとつても増巾器の数を減少させることはできない。片側差分方式の利点は、中央差分方式にくらべてその格子点の出力の帰還量が増加するので、回路が稍安定化することである。もし片側差分の正負の差分量をひとしいとみなして、中央差分の回路と同様に、極性反転増巾器を用いない回路を作ると、シミュレーターの回路は一次遅れ回路の特性を有するものとなるので非常に安定となる。しかしこのように近似するためには格子間隔を小さくしなければならない。

6.5 ヤコビアン項の計算回路素子とその特性

ヤコビアン計算回路第 6.4.1 図の入力 η を Z と f によつておきかえると、第 6.5.1 図をうる。この図において、 A 列の入力は三角波電圧 Δ を除いて、すべて B 列の入力の符号を反転したものである。同様に C 、 E および H 列の



$$\eta_{i,j} = \frac{g_j}{f_j} (Z_{i+1,j} + Z_{i,j+1} + Z_{i,-1,j} + Z_{i,j-1} - 4Z_{i,j}) + f_j$$

$$e_0 = \{ (\eta_{i+1,j} - \eta_{i-1,j})(Z_{i,j+1} - Z_{i,j-1}) - (\eta_{i,j+1} - \eta_{i,j-1})(Z_{i+1,j} - Z_{i-1,j}) \} / 4A$$

第 6.4.3 図 片側差分によるヤコビアン項の計算回路

入力は D 、 F および G 列の入力の符号をそれぞれ反転したものである。今 B 、 C 、 E および H 列からなる回路を第 6.5.2 図のように組み合わせると、この回路は同時に $-A$ 、 $-D$ 、 $-F$ および $-G$ 列の回路となる。従つてヤコビアン計算回路素子として、プリント基板上に第 6.5.2 図の回路を製作すればよい。第 6.5.3 図はこの素子の外観を示すものである。この素子を二枚使用し、第 6.4.1 図に従つて入力を加えればヤコビアン項が計算できる。

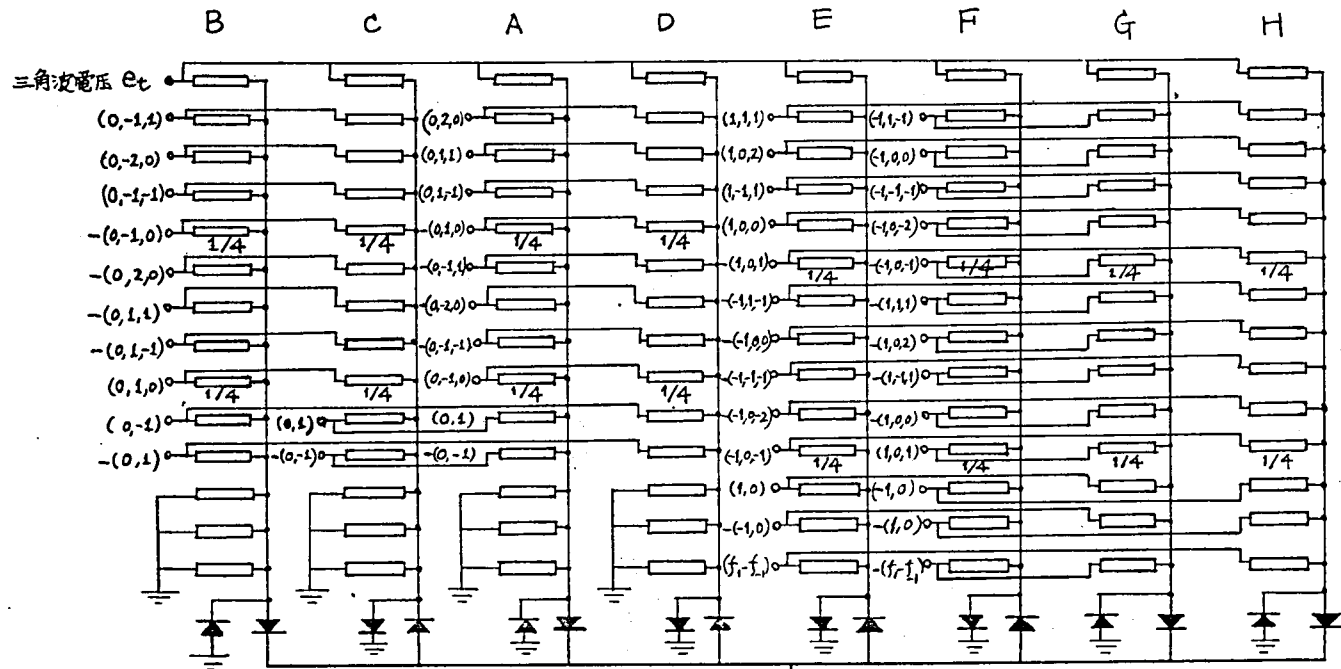
ヤコビアン計算回路素子は元来三角波 $1/8$ 自乗掛算器であるから、その性能は掛算の精度によつて定まる。ヤコビアン計算回路素子の入力端子を、第 6.5.4 図のように組合はせると、5 通りの $1/8$ 自乗掛算回路がえられる。このとき三角波電圧入力端子および Y 入力端子は固定して X 入力端子のみを 5 通りに切換えて掛算の機能を検査する。この検査によつて、ダイオードの特性の不均衡および甚だしい抵抗値の不正は検出できる。

静特性としては自乗出力特性を求めた、自乗特性の例を第 6.5.5 図に示す。図から静特性の振巾誤差の平均を求めると約 5% である。

静特性曲線をうるには、かなりの手間と時間を要するので素子の検査のためには動特性による方が都合がよい。

動特性をうるためには、入力として $X = Y = E \sin \omega t$ 、および $X = E \sin \omega t$ 、 $Y = E \cos \omega t$ を用いた。このとき出力はそれぞれ $X^2 = \frac{E^2}{2}(1 - \cos 2\omega t)$ および、 $XY = \frac{E^2}{2} \sin 2\omega t$

となる。第 6.5.6 図は典型的な入力、出力波形を示す。入力周波数は約 0.15 C/s である。出力に含まれる三角波電圧を一次おくれる増巾器によつて平滑しているので、出力波形には位相おくれが見られる。この図では $(-X)^2$ と $(+X)^2$ の出力振巾がよく一致しているが、ダイオードの平衡が不完全であると出力振巾が一致しない。これにより掛算器の動特性をすることができ



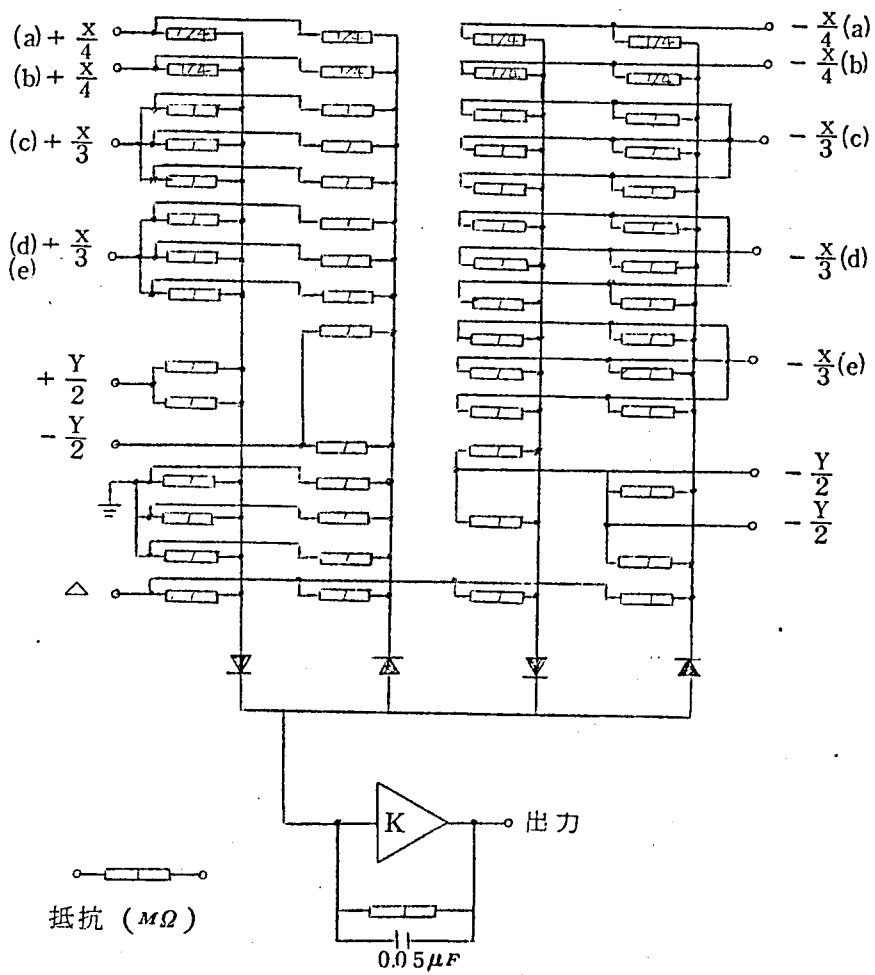
1. ()内の数字は $(\partial \varepsilon / (\Delta S)^2 f_{j+x}, Z_{i+y}, j+z)$

の添字 (x, y, z) を表している。

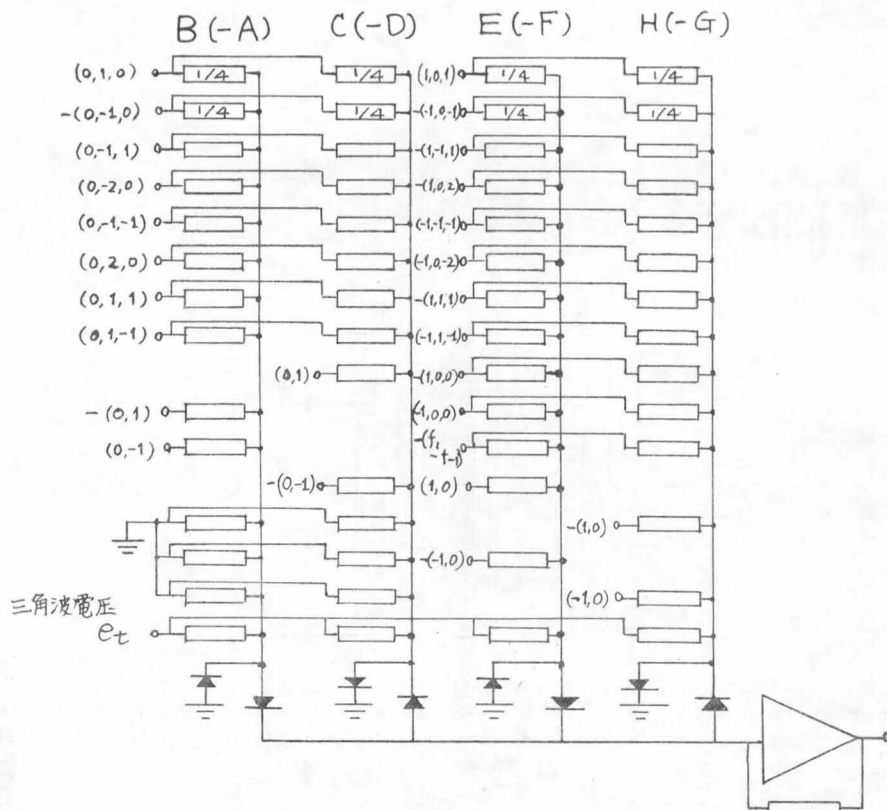
2. は $1 M\Omega$ の抵抗, $1/4$ は $1/4 M\Omega$ である。

3. $(f_1 - f_{-1})$ は $d\varepsilon(f_{j+1} - f_{j-1})$ の入力を表す。

第 6.5.1 図 中央差分によるヤコビアン項の計算回路

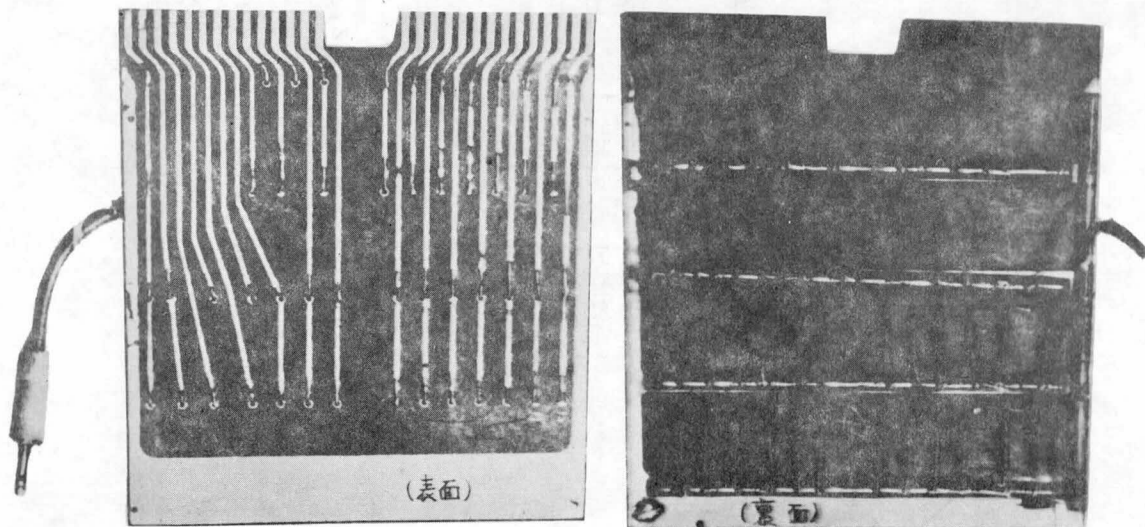


第 6. 5. 4 図 ヤコビアン計算回路素子の 1/8 掛算機能試験回路

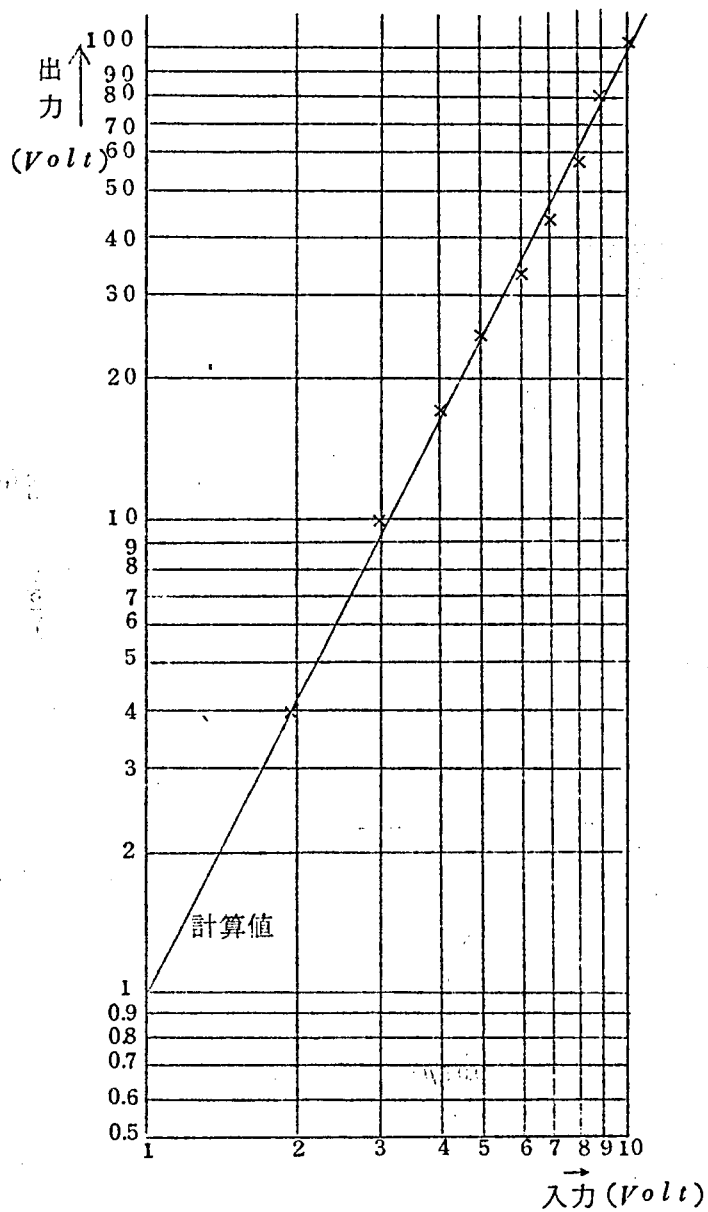


1. 抵抗値 $1\text{ M}\Omega$
2. () 内の記号は第 7. 3. 4 図に同じ

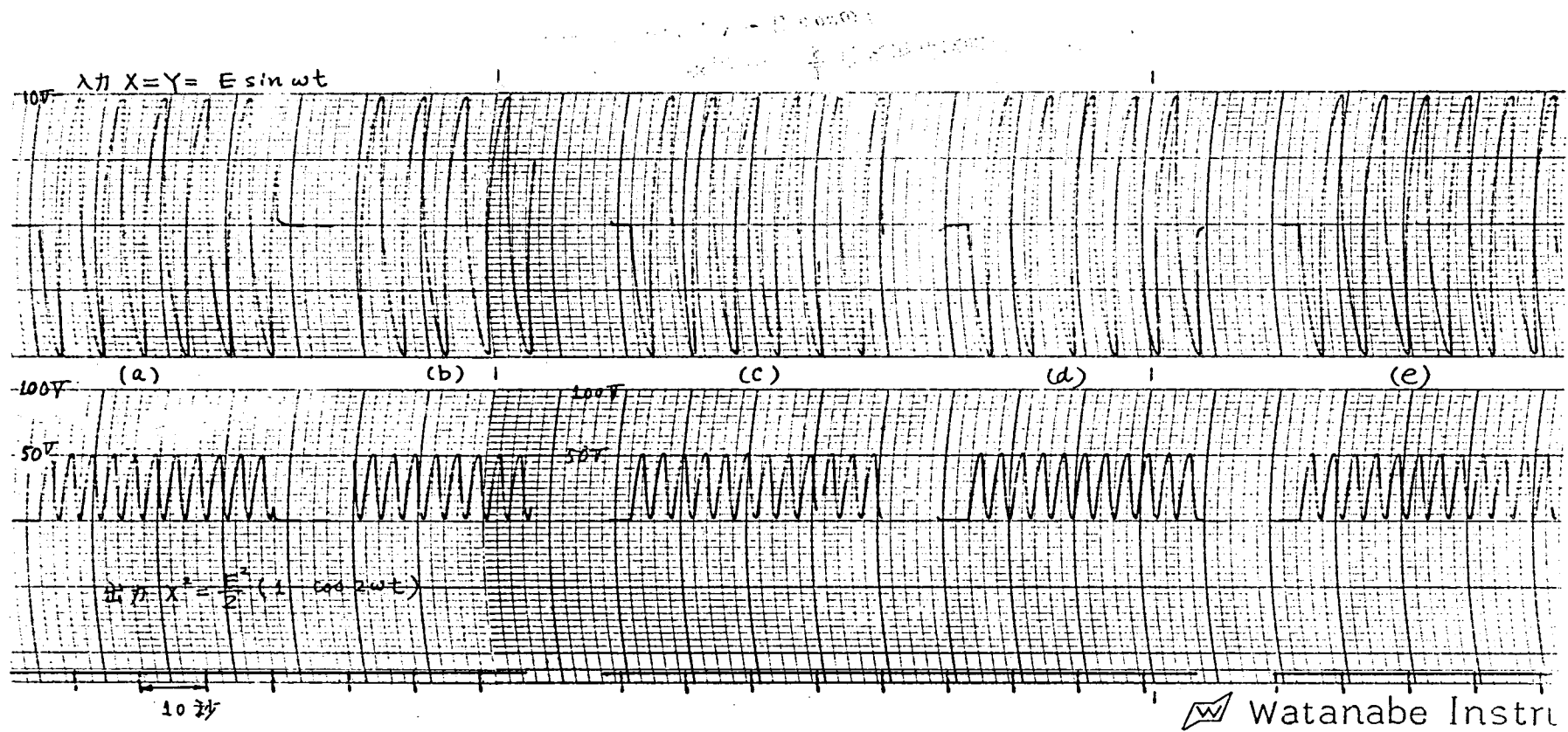
第 6. 5. 2 図 ヤコビアン計算回路素子の回路



第 6. 5. 3 図 ヤコビアン計算回路素子

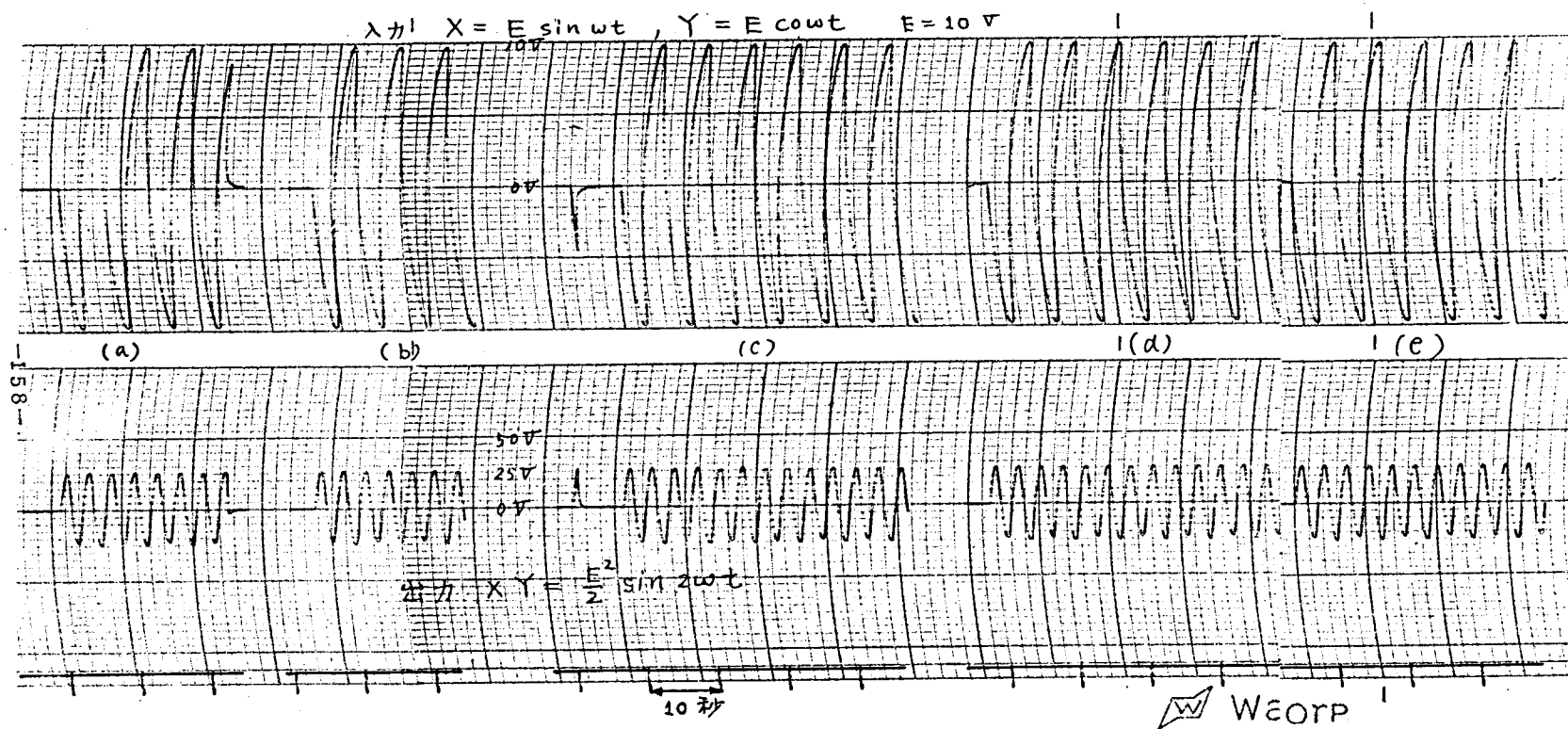


第 6.5.5 図 ヤコビアン計算回路素子の自乗静特性



6. 5. 6. 図 ヤコビアン計算回路素子の $\frac{1}{8}$ 自乗掛算機能の動特性 (A)

入力 $X = E \sin \omega t$ の場合



第 6.5, 6. 図 ヤコビアン計算回路素子の $\frac{1}{8}$ 自乗掛算機能の動特性 (B)
 入力 $X = E \sin \omega t$, $Y = E \cos \omega t$

第7章 シミュレーター回路の設計

本章においては、第5章の(5.1.4)式を基本式として、シミュレーター回路の設計について考察した。シミュレーター回路の構成は、演算増巾器、ヤコビアン項の計算回路、係数器および三角波発生器が主なものである。このうち、演算増巾器は汎用アナログ計算機のものを使用し、その他のものは、計算機の付加装置として作製した。回路の構成に先立つて、渦度方程式のデイメンションの吟味をおこない、演算係数の選定について考察した。

7.1 渦度方程式のデイメンション

アナログ計算機を用いて偏微分方程式を解く場合には、差分方程式を用いるのが一般的である。この際差分量のデイメンションを明確にしておかないと、演算係数を決定する際に重大な誤りを犯すことになる。ここに渦度方程式のデイメンションの吟味を行い、他の典型的な例として、熱伝導の方程式の場合を示した。

渦度方程式は(1.2.9)、(1.2.10)式から成立っている。

$$\eta = \frac{g}{f} \nabla^2 z + f \quad (1.2.9)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{g}{f} \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial x} \quad (1.2.10)$$

(1.2.9)式を t 、 x および y について偏微分して、(1.2.10)式に代入する。

$$\Delta^2 \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{g}{f} \left(\frac{\partial \nabla^2 z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial \nabla^2 z}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial x} \right) - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial x} \quad (7.1.1)$$

ここで、 $\nabla^2 z$ 、 g 、 f のデイメンションはつぎのとおりである。

$$[\nabla^2 z] = [L]^{-1}$$

$$[g] = [L]^1 [T]^{-2} \quad (7.1.2)$$

$$[f] = [T]^{-1}$$

従つて、(7.1.1)式の両辺共デイメンションは $[L]^{-1} [T]^{-1}$ である。

(7.1.1)式を格子間隔 ΔS をもつ格子領域で差分方程式に変換すると、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \nabla^2 Z_{i,j} = & \frac{1}{(2\Delta S)^2} \left\{ \frac{q}{f_j} (\nabla^2 Z_{i+1,j} - \nabla^2 Z_{i-1,j}) (Z_{i,j+1} - Z_{i,j-1}) \right. \\ & \left. - \left(\frac{q}{f_{j+1}} \nabla^2 Z_{i,j+1} - \frac{q}{f_{j-1}} \nabla^2 Z_{i,j-1} \right) (Z_{i,j+1} - Z_{i,j-1}) \right\} \\ & - \frac{1}{(2\Delta S)^2} (f_{j+1} - f_{j-1}) (Z_{i,j+1} - Z_{i,j-1}) \quad (7.1.3) \end{aligned}$$

(7.1.3) 式右辺のデイメンションは $[L]^{-1} [T]^{-1}$ であるから、 ΔS のデイメンションは $[L]$ であり、 q, z のデイメンションに含まれる $[L]$ と同じ長さの単位で測らなければならない。

渦度方程式の場合は格子間隔の単位が容易に分るが、次の熱伝導の方程式の場合は視察によつて簡単に決定出来ない。熱伝導の方程式は一般に次式で与えられる。

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot K \nabla T + f \quad (7.1.4)$$

ここに、 T : 温度、 c : 比熱、 ρ : 密度、 K : 熱伝導率、 f : 媒質中の熱源 (或は吸収源) による発熱率 (或は消熱率)、 t : 時間である。簡単のために、直角座標系における一次元の場合を考えると、(7.1.4) 式は

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} (K \frac{\partial T}{\partial x}) + f \quad (7.1.5)$$

となる。 x 軸にそつて Δx の間隔で分割した各点における T の値を T_0, T_1, \dots, T_N とすれば、(7.1.5) 式の差分近似式は次のようになる。

$$\begin{aligned} c_n \rho_n \frac{dT_n}{dt} = & \frac{1}{\Delta x} \left[K_{n+1} \frac{T_{n+1} - T_n}{\Delta x} - K_n \frac{T_n - T_{n-1}}{\Delta x} \right] + f_n \\ = & \frac{1}{(\Delta x)^2} \left[K_{n+1} (T_{n+1} - T_n) - K_n (T_n - T_{n-1}) \right] + f_n \quad (7.1.6) \end{aligned}$$

(7.1.4) ~ (7.1.6) 式中には x の他に長さの単位をもつ量はないので、デイメンションの検討が必要になる。

c, ρ, K, T, f はつぎのデイメンションをもっている。

$$[c] = [L]^2 [M]^0 [T]^{-2} [\theta]^{-1}$$

$$[\rho] = [L]^{-3} [M]^1$$

$$[K] = [L]^1 [M]^1 [T]^{-3} [\theta]^{-1}$$

$$[T] = [\theta]^1$$

$$[f] = [L]^1 [M]^1 [T]^3$$

従つて

$$[C\rho \frac{\partial T}{\partial t}] = [L]^{-1} [M]^1 [T]^{-3}$$

$$[K \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}] = [L]^1 [M]^1 [T]^{-3} [L]^{-2}$$

これから x のディメンション $[L]$ は C, ρ, K, f の常数に含まれており、これらの常数の測定単位と x の単位とはひとしくなければならない。

7.2 変換係数の決定

(5.1.5) 式について変換係数を決定する。変数は Z と t であるから、 Z を電圧軸、 t を時間軸にえらぶ。 Z の変域は 500 ミリバールにおける気圧高度の変化を考慮して、0 ~ 1 Km とする。演算変数を Z ととして、換算係数 a_z および a_t を次のように定める。

$$Z = a_z z \quad (7.2.1)$$

$$\tau = a_t t$$

Z の 1 Km を Z の 50 V, t の 1 時間が τ の 1 秒になるように a_z と a_t を定めると $a_z = 50$, $a_t = 1/3600$ となる。

(5.1.5) 式に (7.2.1) 式を代入して、演算変数 Z, τ で書く。

$$\begin{aligned} Z_{i,j} = & \frac{1}{16 a_z a_t} \left\{ \frac{g}{(\Delta S)^2 f} (Z_{i+2,j} + Z_{i+1,j+1} + Z_{i+1,j-1} - 4Z_{i+1,j} - Z_{i-1,j+1} - Z_{i-2,j} \right. \\ & \left. - Z_{i-1,j-1} + 4Z_{i-1,j}) (Z_{i,j+1} - Z_{i,j-1}) \right. \\ & - \left\{ \frac{g}{(\Delta S)^2 f_{j+1}} (Z_{i+1,j+1} + Z_{i,j+2} + Z_{i-1,j+1} + Z_{i,j-4} - Z_{i,j+1}) \right. \\ & \left. - \frac{g}{(\Delta S)^2 f_{j-1}} (Z_{i+1,j-1} + Z_{i,j+Z_{i-1,j-1}+Z_{i,j-2} - 4Z_{i,j-1}) \right\} \\ & \left. \times (Z_{i+1,j} - Z_{i-1,j}) \right\} d\tau \\ & + \frac{1}{16 a_z} \int (f_{j+1} - f_{j-1}) (Z_{i+1,j} - Z_{i-1,j}) d\tau \\ & + \frac{1}{4} (Z_{i+1,j} + Z_{i,j+1} + Z_{i-1,j} + Z_{i,j-1}) - \frac{1}{4} (Z_{i+1,j}^{+0} + Z_{i,j-1}^{+0} + Z_{i-1,j}^{+0} + Z_{i,j-1}^{+0}) \\ & + Z_{i,j}^{+0} \end{aligned} \quad (7.2.3)$$

(7.2.3) 式の右辺第 1 項は前節でのベタヤコビアン計算回路で計算することにする。

ここに、 $H_{i+1,j}=Z_{i+1,j}+Z_{i+1,j+1}+Z_{i+1,j-1}-4Z_{i+1,j}$

$$H_{i-1,j}=Z_{i-1,j}+Z_{i-2,j}+Z_{i-1,j-1}-4Z_{i-1,j} \quad (7.2.4)$$

$$H_{i,j+1}=Z_{i+1,j+1}+Z_{i,j+2}+Z_{i-1,j+1}+Z_{i,j}-4Z_{i,j+1}$$

$$H_{i,j-1}=Z_{i+1,j-1}+Z_{i,j}+Z_{i-1,j-1}+Z_{i,j-2}-4Z_{i,j-1}$$

とおく。

波高値 A なる三角波電圧を用いる $1/8$ 自乗掛算方式によれば

$$\begin{aligned} Z_{i,j} = & \frac{A}{32k\alpha z\alpha_i} \int_{\tau}^{\tau} \frac{k}{4A} \Sigma ()^2 \alpha \tau + \frac{1}{16\alpha_i} \left\{ (f_{i+1}-f_{j-1}) \right. \\ & \times (Z_{i+1,j}-Z_{i-1,j}) \alpha t + \frac{1}{4} (Z_{i+1,j}+Z_{i,j-1}+Z_{i-1,j}+Z_{i,j-1}) \\ & \left. + \frac{1}{4} (Z_{i+1,j}^0+Z_{i,j-1}^0+Z_{i-1,j}^0+Z_{i,j+1}^0) + Z_{i,j}^0 \right\} \quad (7.2.5) \end{aligned}$$

上式中 $\Sigma ()^2$ は次式を意味する。

$$\begin{aligned} \Sigma ()^2 = & (A + \frac{g}{(\Delta S)^2 f_j} H_{i+1,j} - \frac{g}{(\Delta S)^2 f_j} H_{i-1,j} + Z_{i,j+1} - Z_{i,j-1})^2 \\ & + (A - \frac{g}{(\Delta S)^2 f_j} H_{i+1,j} + \frac{g}{(\Delta S)^2 f_j} H_{i-1,j} - Z_{i,j+1} + Z_{i,j-1})^2 \\ & - (A - \frac{g}{(\Delta S)^2 f_j} H_{i+1,j} + \frac{g}{(\Delta S)^2 f_j} H_{i-1,j} + Z_{i,j+1} - Z_{i,j-1})^2 \\ & - (A + \frac{g}{(\Delta S)^2 f_j} H_{i+1,j} - \frac{g}{(\Delta S)^2 f_j} H_{i-1,j} - Z_{i,j+1} + Z_{i,j-1})^2 \\ & - (A + \frac{g}{(\Delta S)^2 f_{j+1}} H_{i,j+1} - \frac{g}{(\Delta S)^2 f_{j-1}} H_{j,j-1} + Z_{i+1,j} - Z_{i-1,j})^2 \\ & - (A - \frac{g}{(\Delta S)^2 f_{j+1}} H_{i,j+1} + \frac{g}{(\Delta S)^2 f_{j-1}} H_{i,j-1} - Z_{j+1,j} + Z_{i-1,j})^2 \\ & + (A - \frac{g}{(\Delta S)^2 f_{j+1}} H_{i,j+1} + \frac{g}{(\Delta S)^2 f_{j-1}} H_{i,j-1} + Z_{i+1,j} - Z_{i-1,j})^2 \\ & + (A + \frac{g}{(\Delta S)^2 f_{j+1}} H_{i,j+1} - \frac{g}{(\Delta S)^2 f_{j-1}} H_{i,j-1} - Z_{i+1,j} + Z_{i-1,j})^2 \quad (7.2.6) \end{aligned}$$

従つて、(7.2.5) 式の右辺第 1 項の被積分項はヤコビアン計算回路の出力である。 k は利得である。

(7.2.6) 式中 $g/(\Delta S)^2 f$ の値は約 10^{-3} である。この値を係数器で

設定するため、 $g\xi/(\Delta S)^2 f \div 0.5$ となるように、 ξ の値を 500 とする。
このとき (7.2.5) 式の第 1 項の積分記号の前の係数は $A/32k\alpha z a_i \xi$ となる。

$A = 50V$, $k = 0.9$ とすれば (7.2.2) 式によつて

$$\frac{A}{32k\alpha z a_i \xi} = \frac{50 \times 3600}{32 \times 0.9 \times 50 \times 500} = \frac{1}{4} \quad (7.2.7)$$

となる。一方 (7.2.5) 式の右边第 2 積分項の係数は
($f_{j+1} - f_{j-1}$) $\div 1 \times 10^{-5}$ として

$$(f_{j+1} - f_{j-1}) \frac{1}{16\alpha t} = 0.00225 \quad (7.2.8)$$

である。(7.2.5) 式右辺の第 1 項および第 2 項の積分を係数 1 なる積分器によつて計算するときは、積分器の入力側に用いる係数器は、(7.2.7) および (7.2.8) 式のように設定すればよい。

なおこの (7.2.5) 式右辺の第 2 積分項は第 1 積分項の中にも含めることもできる。このときは (7.2.6) 式の後から 4 つの項中にある

$$\frac{g}{(\Delta S)^2 f_{j+1}} \xi H_{i,j+1} - \frac{g}{(\Delta S)^2 f_{j-1}} \xi H_{i,j-1} \quad \text{に}$$

$$\alpha z \xi (f_{j+1} - f_{j-1})$$

なる項が加わる。この項の値の大きさは、 αz および ξ の値を上のようにした場合

$$0 [\alpha z \xi (f_{j+1} - f_{j-1})] = 0.25 (Volts) \quad (7.2.9)$$

である。(7.2.6) 式の後 4 項をみればわかるようにこのときは $\pm \alpha z \xi (f_{j+1} - f_{j-1})$ なる入力電圧が一定電圧として必要となる。

(7.2.8) 式および (7.2.9) 式をみればわかるように、何れの方式によつても、相当の設定誤差が予想される。設定すべき係数器の個数は後者の場合の方が前者の 2 倍であり、又後者ではヤコビアン計算回路の誤差が含まれるので、(7.2.8) 式のように係数器を設定して計算する方が、よいと考えられる。

緯度 ψ を $32.5^\circ N$ から 2.5° おきに $47.5^\circ N$ までとつたときの f および $g\xi/(\Delta S)^2 f$ の値を第 7.2.1 表に示した。

但し $g = 9.8 \times 10^3 \text{ km/sec}^2$, $\Delta S = 300 \text{ km}$ である。

第 7.2.1 表 $g\xi/(\Delta S)^2 f_j$ の値

$\theta^\circ N$	$f \times 10^{-4}$	$\frac{g\xi}{(\Delta S)^2 f}$
47.5	1.0723	0.507735
45.0	1.0284	0.529409
42.5	0.9826	0.554086
40.0	0.9349	0.582355
37.5	0.8854	0.614914
35.0	0.8342	0.652655
32.5	0.7815	0.695802

第 7.2.2 表は前表と同様に, $35^\circ N$ から $45.0^\circ N$ までの, $(f_{j+1} - f_{j-1})/16at$ および $ax\xi(f_{j+1} - f_{j-1})$ の値である。

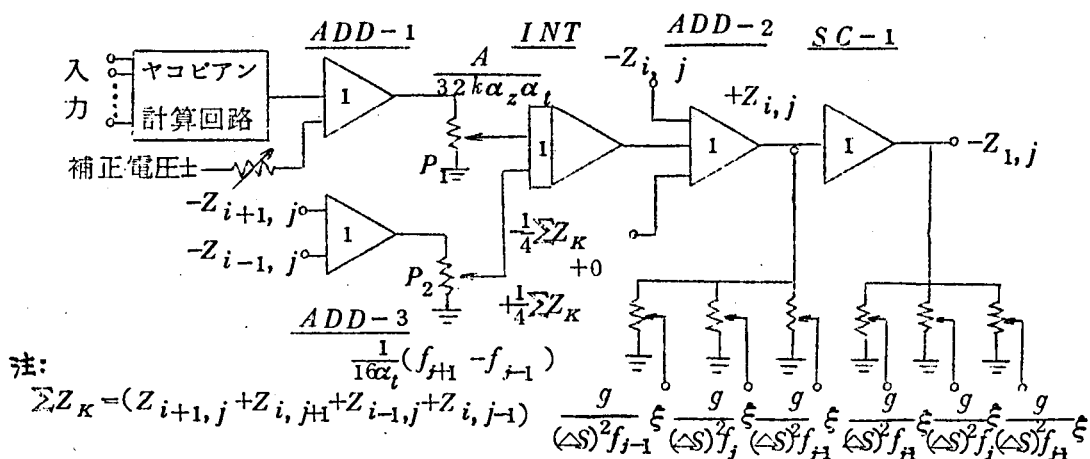
第 7.2.2 表 $(f_{j+1} - f_{j-1})/16at, ax\xi(f_{j+1} - f_{j-1})$ の値

j	$\theta^\circ N$	$f \times 10^{-4}$	$(f_{j+1} - f_{j-1})/16at$	$ax\xi(f_{j+1} - f_{j-1})$
7	47.5	1.0723		
6	45.0	1.0284	0.00202	0.224 volt
5	42.5	0.9826	0.00214	0.234
4	40.5	0.9349	0.00219	0.243
3	37.5	0.8854	0.00227	0.252
2	35.0	0.8342	0.00234	0.260
1	32.5	0.7815		

但し $ax=50$, $\xi=500$, $at=1/3600$ である。

7.3 シミュレーター回路の構成

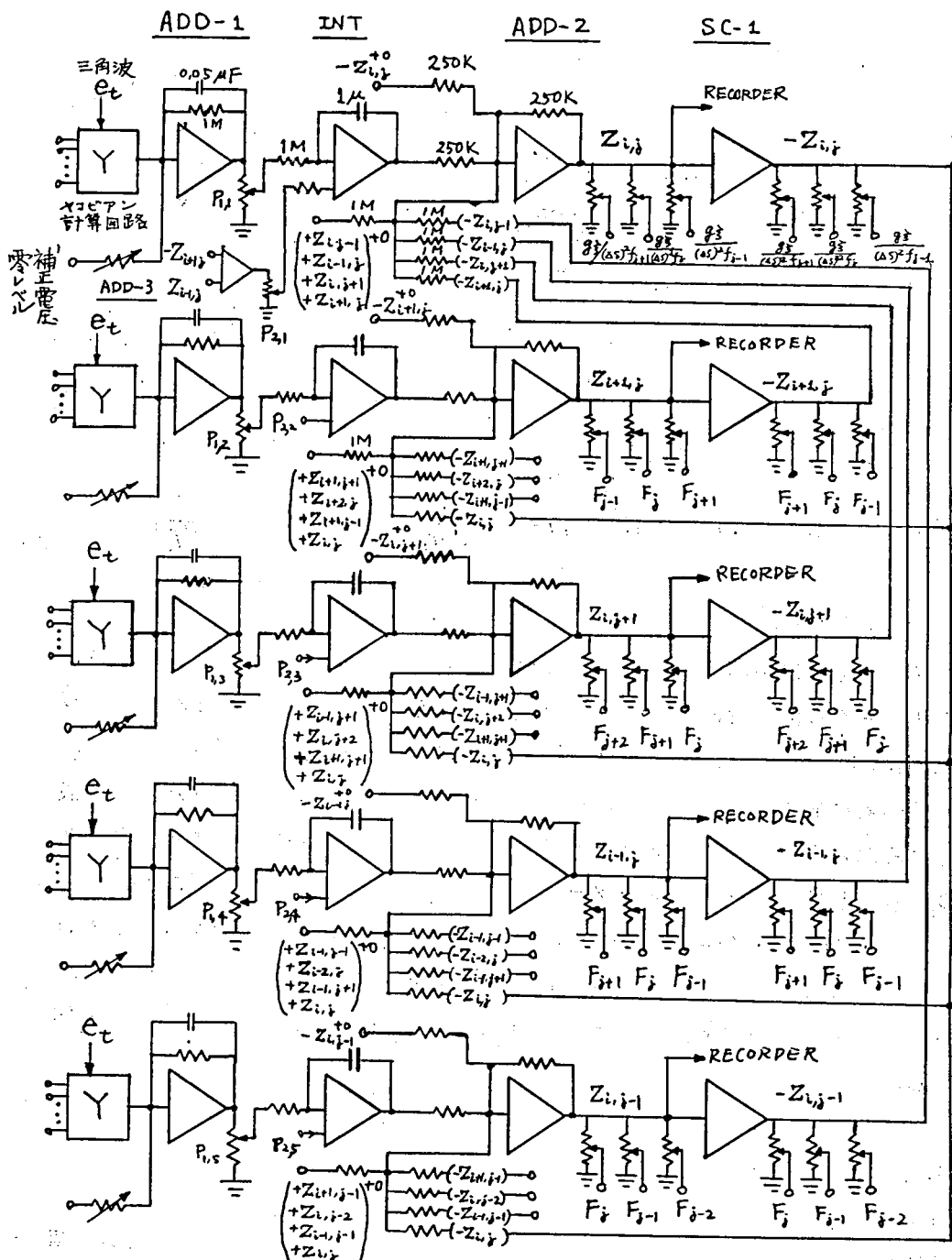
滴度方程式をアナログ・シミュレーションによつて, 近似的に解くためには, 前節の (7.2.5) 式に従つて回路を構成し, 境界値および初期値が適切に与えられるようにしなければならない。第 7.3.1 図は (7.2.3) 式或いは (7.2.5) 式を格子点 $Z_{i,j}$ において実現する回路である。



第 7.3.1 図

第 7.3.1 図において $ADD-1$ の出力は (7.2.5) 式第 1 項の被積分項、 $ADD-3$ の出力は同じく第 2 項の被積分項を計算するものである。ヤコビアン計算回路の入力には (7.2.6) 式右辺の各項の電圧が加わる。 $ADD-1$ に加えた補正電圧は直流分のバランス用である。 P_1 、 P_2 は積分係数を設定するためのポテンシオメーターである。境界値および初期値は $ADD-2$ の入力としてポテンシオメーターで設定して加える。第 7.3.2 図は $Z_{i,j}$ 、 $Z_{i+1,j}$ 、 $Z_{i,j+1}$ 、 $Z_{i-1,j}$ 、 $Z_{i,j-1}$ の 5 点について構成した (7.2.5) 式の計算回路である。この回路のうち、ヤコビアン計算回路および $g\xi/(\Delta S)^2 f$ の値を設定するポテンシオメーター群はアナログ計算機の付加装置として作製した。

$ADD-2$ および $SC-1$ の出力側に接続したポテンシオメーターは出力 $Z_{i,j}$ の $\pm g\xi/(\Delta S)^2 f_{j-1}$ 、 $\pm g\xi/(\Delta S)^2 f_j$ および $\pm g\xi/(\Delta S)^2 f_{j+1}$ に相当する出力を準備するものである。これらの出力は (7.2.6) 式に従つて、ヤコビアン計算回路の入力となる。ヤコビアン計算回路は原理上、被乗算項になる正負入力の絶対値がひとしくない場合大きな誤差を生ずる。従つて、これらのポテンシオメーターの設定は、零点法によつて、厳密に行う必要がある。渦度方程式をデジタル計算機によつて解く場合には境界上の渦度 η の値は各計算段階において風の方向を吟味して決定した。



註 ()⁺ は初期値を, E_j は

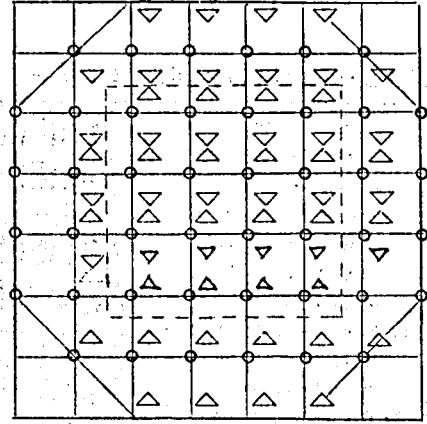
第 7.3.2 図 過度方程式の 5 点領域に対する計算回路 $\frac{g \xi}{(\Delta s)^2 f_j}$ を示す。

但し第 7.3.1 図の ADD-3 は省略してある

しかしながら、シミュレーター回路ではこのような方法は採用できない。
従つて、 η の境界値を与えるために、境界点よりも一つ外側の点の z の値も、
境界値として与えておく必要がある。

第 7.3.3 図は 4×4 格子点が領域内にある場合に必要な境界点と、 $g\epsilon/(\Delta S)^2$
 f_j の値を設定するためのポテンシオ
・メーターの数を各格子点について示
したものである。図中 Δ は $g\epsilon/(\Delta S)^2$
 f_{j+1} 、 \circ は $g\epsilon/(\Delta S)^2 f_j$ 、 ∇ は $g\epsilon/$
 $(\Delta S)^2 f_{j-1}$ の値を設定するために必
要なポテンシオメーターである。

$$\Delta g\epsilon/(\Delta S)^2 f_{j+1}, \circ g\epsilon/(\Delta S)^2 f_j, \nabla g\epsilon/(\Delta S)^2 f_{j-1}$$



第 7.3.3 図 4×4 格子領域にお
いて必要な境界点と
各点に必要なポテン
シオメーター

第 7.3.4 図はヤコビアン計算回路お
よび $g\epsilon/(\Delta S)^2 f_j$ 設定用ポテンシオ
メーターを有する付加装置の外観図で
ある。シミュレーターを使用する際
には、演算係数を第 7.2 節に従つて決定
する。演算係数の設定は第 7.3.1 図お
よび第 7.3.2 図のポテンシオメーター
 $P_{1,k}$ および $P_{2,k}$ ($k=1 \sim 5$) によつて
行ひ。今加算器 $ADD-1$ および AD

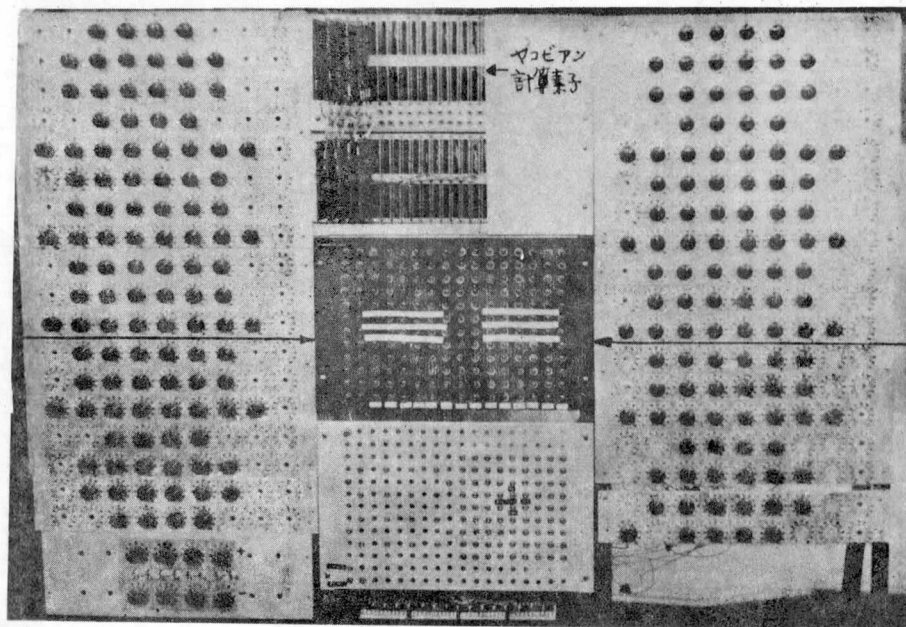
$D-3$ の利得を 1 とすれば、 $P_{1,k}$ および $P_{2,k}$ の設定値は (7.2.7) およ
び (7.2.8) 式によつて、それぞれ $4/32 k a z a_i \epsilon$ および $(j+1-f_{j-1})/16 a_i$
となる。ここに k はヤコビアン計算回路の特性による定数であつて、実測に
より 0.9 を用いる。 $P_{2,k}$ の設定値は at によつてのみ決定されるから、
 $P_{2,k}$ の値を一定として $P_{1,k}$ の値を変化するとき a_i が変化することにな
る。このとき境界値および初期値を一定とすると、そのときの a_z に対応
する相似な等圧面高度分布に対する計算を行うことができる。

ADD-2 の出力側ポテンシオメータ

SC-1 の出力側ポテンシオメータ

ADD-2
の出力と結
ぶ端子板

SC-1 の
出力と結
ぶ端子板



第 7. 3. 4 図 附加装置の外観図

第8章 シミュレーションによる渦度方程式の数値計算例

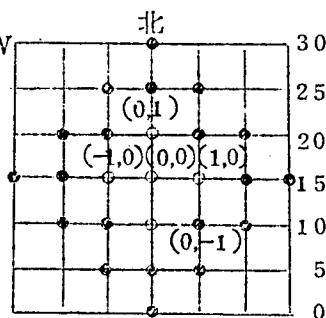
アナログ、シミュレーションの附加装置としては 4×4 領域のものを作成した。しかし 4×4 領域では必要な演算増巾器が 80 台となるので、この領域についての計算は実施困難であつた。従つて一演算単位として 5 点を十字形に含む領域を選びシミュレーター回路の基本的な性能を検討した。ここに、デジタル計算機の数値計算例と比較するため、境界条件および初期値を 4.9 節にのべた 5 点領域における例題とひとしくする。すなわち領域は一辺 1500 Km の正方形領域で、格子間隔 300 Km である。緯度は 300 Km 当り 2.5° であつて、 $32.5^\circ N$ から $47.5^\circ N$ に対応する。

8.1 南北方向に一定傾斜をもつ初期値分布の場合

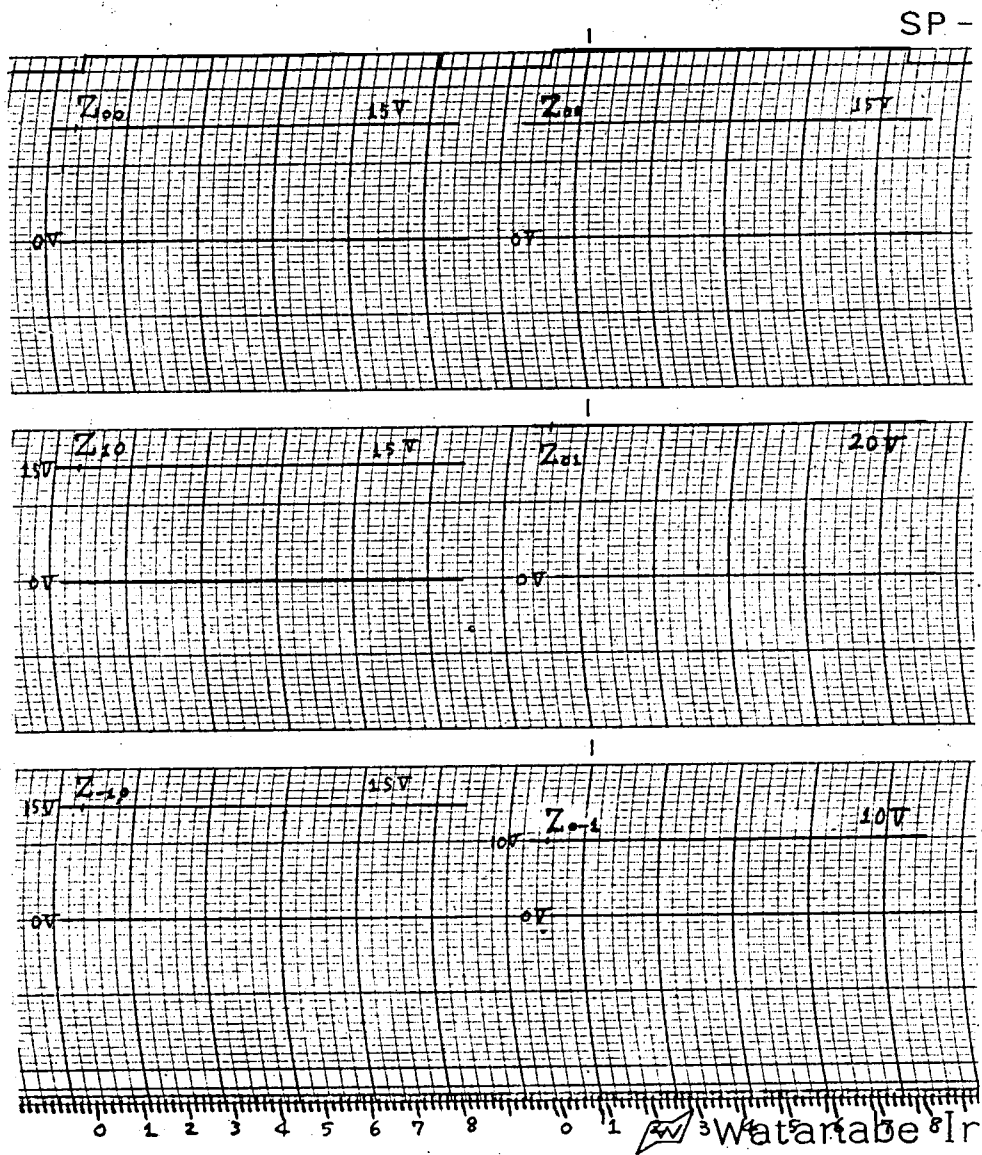
気圧高度 Z の値が、第 8.1.1 図に示すように南北方向に一定傾斜をもつときには、(1.2.10) 式から明らかなように Z , η の値が水平方向ですべてひとしいので、 x 方向の Z , η の微係数が零となる。従つて、 $\partial \eta / \partial x$ は零となつて、初期値から変化しない。この例題はヤコビアン回路のバランスの点検となる。計算結果を第 8.1.2 図に

示した。この結果をみると、回路は充分安定であり、バランスしていることが分る。三角波の振巾として $A = 80 V$ を使用し、 $\alpha_t = 1/3600$ としたので、時間軸は 1 秒が実時間の 1 時間に対応している。このとき第 7.3.2 図の P_1, h ($h=1 \sim 5$) の設定値

は、 $ADD-1$ の利得を $1/3$ とし、 0.3 である。



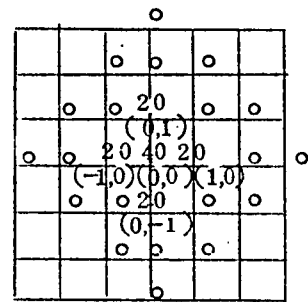
第 8.1.1 図 等圧面高度が南北方向に一様に傾斜している初期値分布



第 8.1.2 図 等圧面高度が南北方向に、一様に傾斜した
初期値に対する計算結果 (バランス・テスト)

8.2 等圧面高度が Z_{00} において極大値をもつような錐面を形成する初期値分布の場合

等圧面高度が格子点 $(0,0)$ において極大値をもつ例題の一つとして、第 8.2.1 図に示すように、 $Z_{00} = 40V$ $Z_{10} = Z_{01} = Z_{10} = Z_{01} = 20V$ 、境界値をすべて $0V$ に選ぶ。

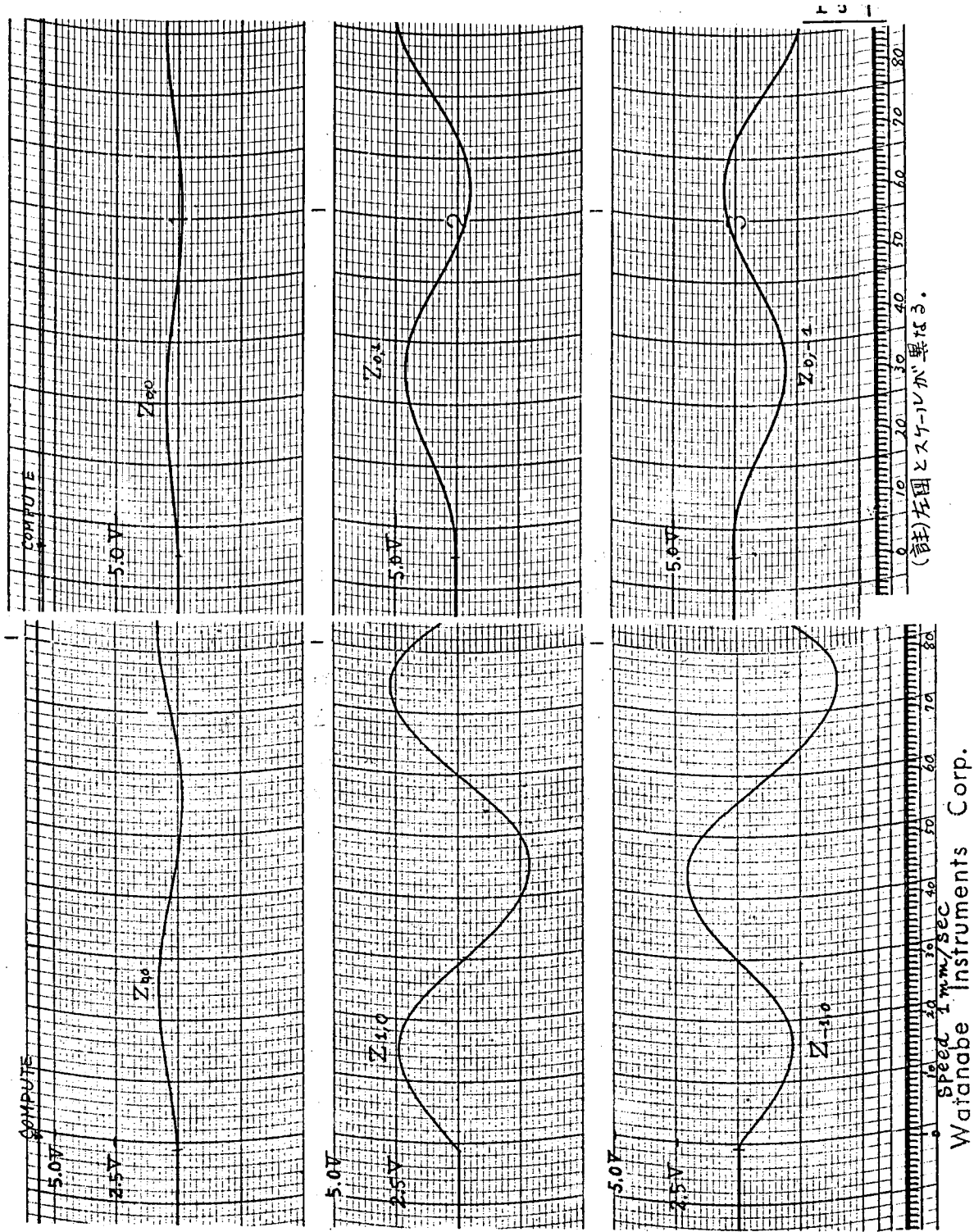


第 8.2.1 図 等圧面高度 Z が $(0,0)$ において極大値をもつ、錐面状に分布している初期値
(単位 ボルト)

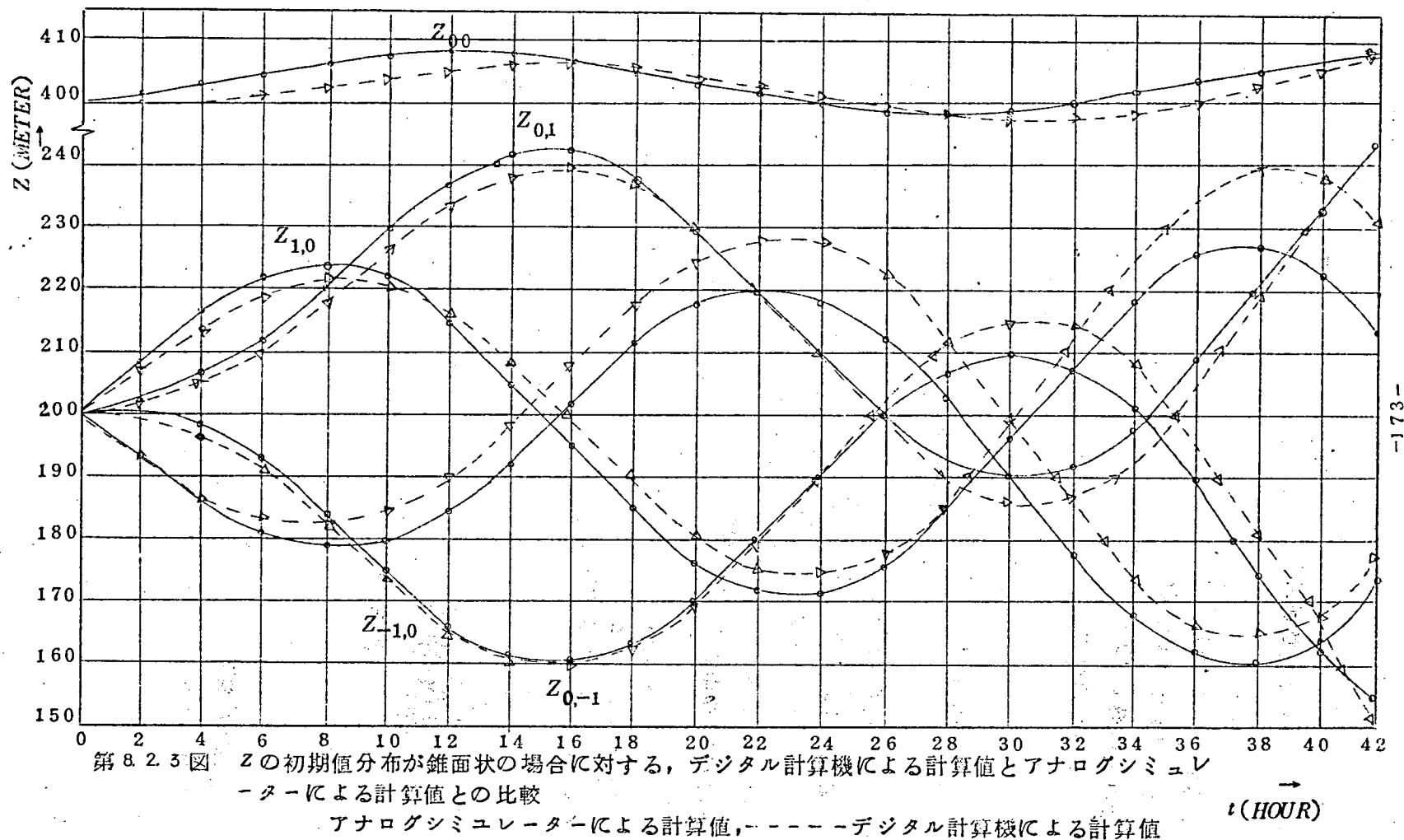
$a_z = 100V/km$ とすれば、このとき $40V$ は $400m$ に、 $20V$ は $200m$ に相当している。

この例題の計算は、波高値が $80V$ の三角波を使用し、 a_i を $1/1800$ として行つた。ヤコビアン の計算回路として、第 6.2.3 図の回路における R' を $100K\Omega$ とし、 R を $1M\Omega$ にえらんだので $ADD-1$ を含む利得は $1/3$ となる。従つて積分器の係数器 $P_{1,k}$ ($k=1\sim 5$) の設定値は 0.3 となる。但し (7.2.7) 式によつて $P_{1,k}$ の値を決定する際に前と同様に式中の k は 0.9 である。

$a_i = 1/1800$ であるので演算時間 2 秒が実時間の 1 時間に相当する。各点の Z の変化は初期電圧に比べて小さいので、第 8.2.2 図はこの例題の解を、各点の初期値電圧からの差として示している。 $1V$ は実際の等圧面高度 $10m$ に対応する。第 8.2.3 図は第 8.2.2 図の電圧値を等圧面高度に換算して示したものである。図中実線はシミュレーターによる計算値、破線はデジタル計算機による計算値である。



第 8.2.2 図 等圧面高度が Z_0 において極大値を示す錐面状分布の初期値に対するアナログシミュレーターの解



領域，緯度および格子間隔を前節と同様にとり，第 8.3.1 図に示す初期値分布について計算する。この例題はデジタル計算機による 5 点領域の例題第 4.9.1(e)図に対応するものである。第 8.3.

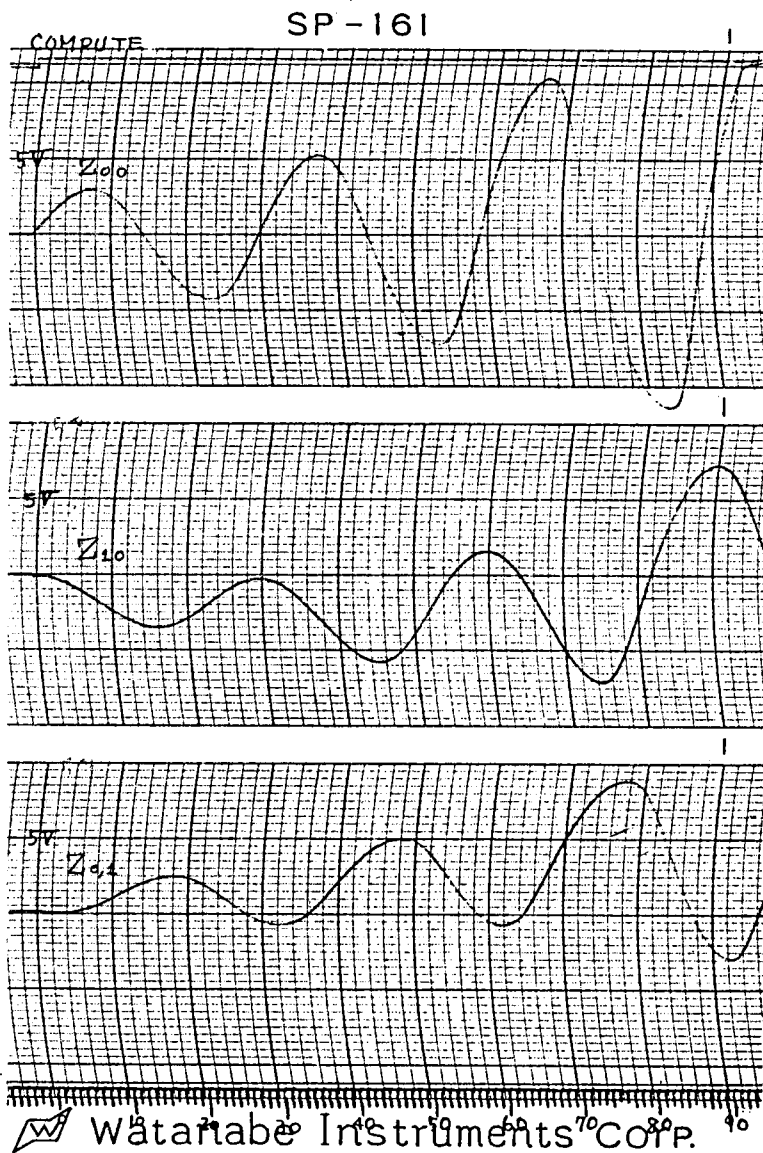
A 6x6 grid representing a 2D lattice. The horizontal axis is labeled 'S' and the vertical axis is labeled 'S'. The origin (0,0) is marked with a dot. Other points are marked with dots at (1,0), (-1,0), (0,1), and (0,-1). The grid is labeled with 'S' at the top and left edges.

第 8.3.1 図 等圧面高度がステップ状に分布している初期値

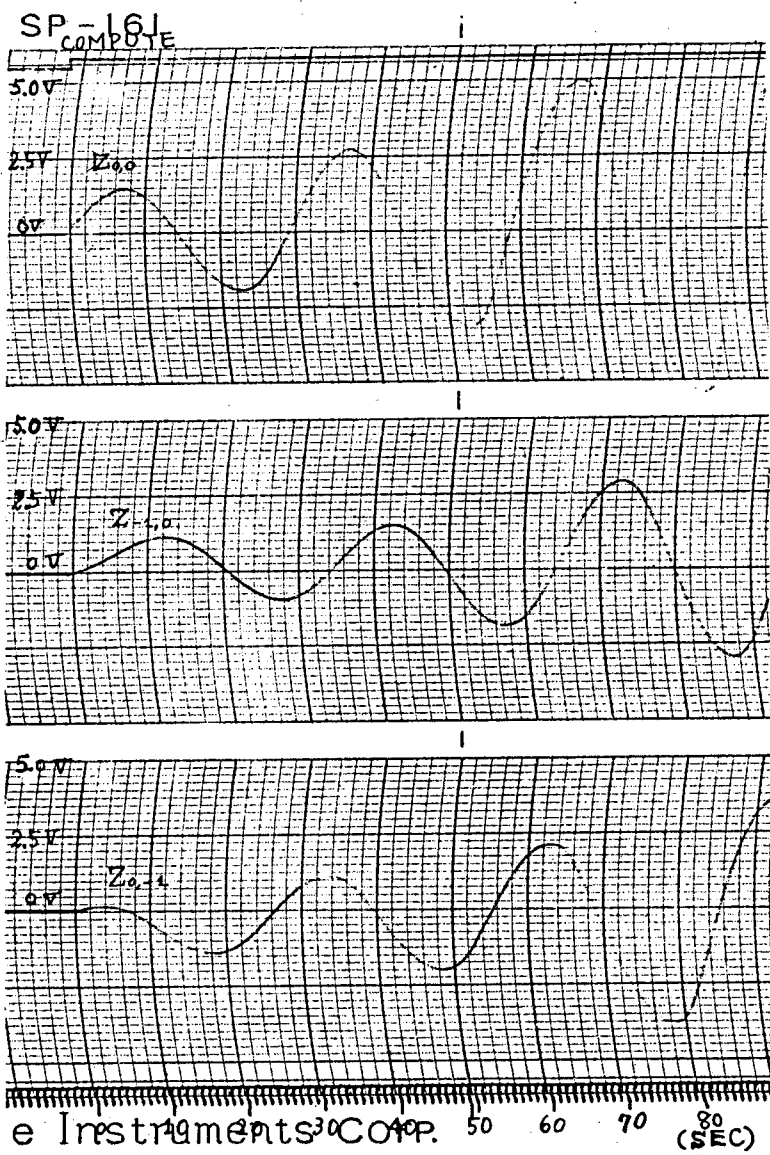
第 8.3.3 図は第 8.3.2 図の電圧値を等圧面高度に換算し、デジタル計算機による計算結果と共に示したものである。実線はシミュレーターによる計算値を、破線はデジタル計算機による計算値を示す。

第 8.3.4 図は $P_{1,4}$ の値をこのようにえらんで、 Z_{00} の値を $X-Y$ レコーダによつて記録した結果である。横軸は時間軸であつて、1 秒が 1 時間に対応する。縦軸は電圧である。電圧 1 V は $P_{1,4}$ の値 0.1, 0.2, 0.3 および 0.6 に対して、それぞれ等圧面高度 5/3 m, 10/3 m, 5 m および 10 m に相当する。

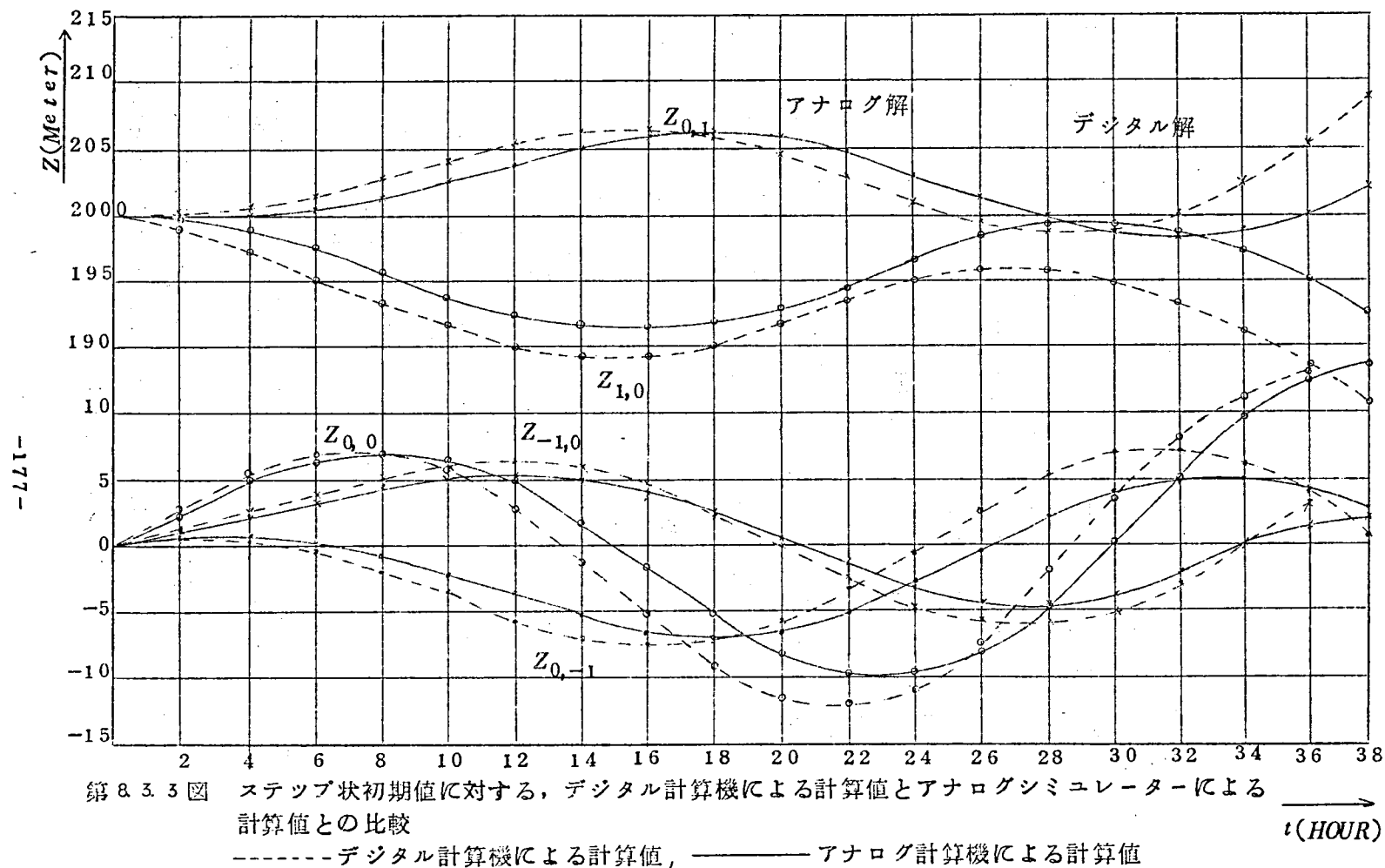
-174-

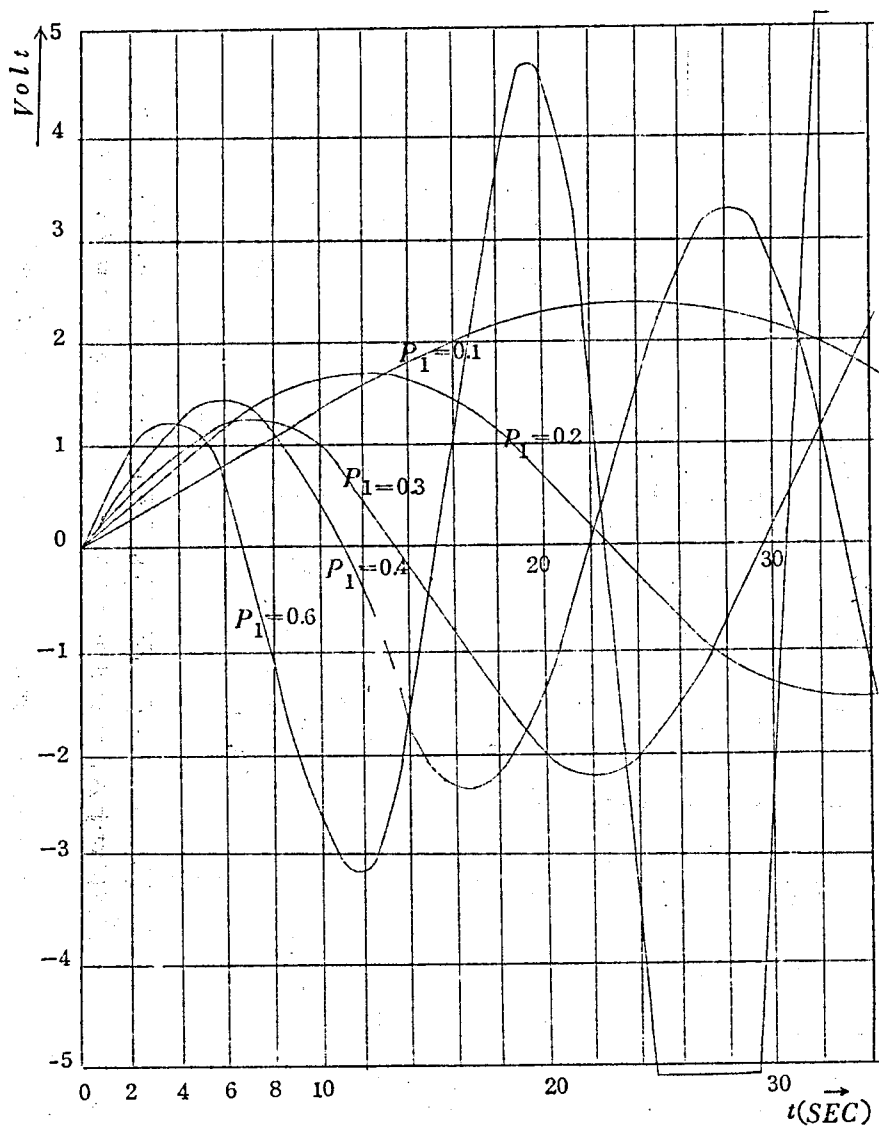


第 8.3.2 図 等圧面高度 Z が第 8.3.1 図に示すようにステップ状に分布している初期値に対するアナログシミュレーターの解

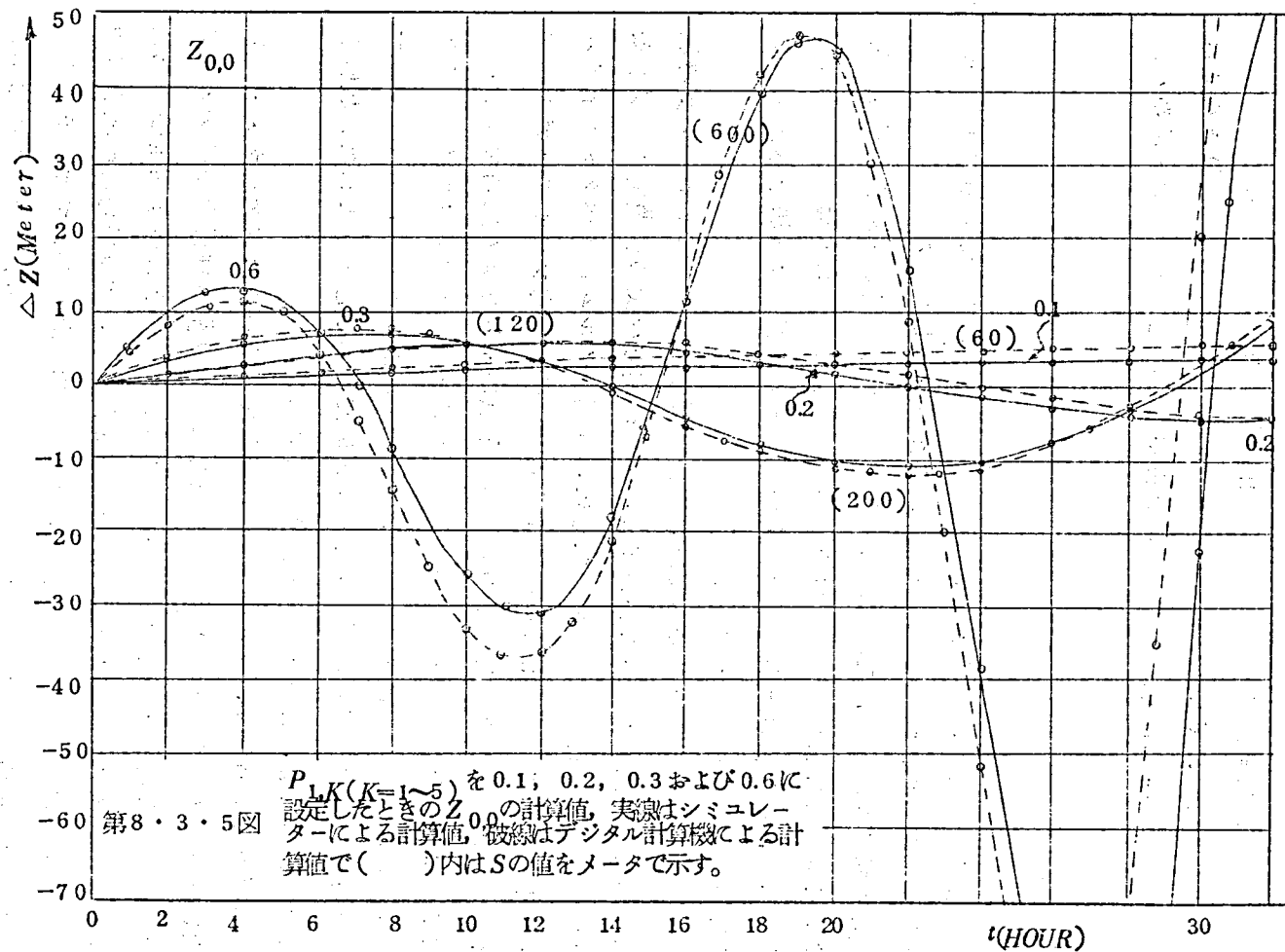


第 8.3.2 図 同





第 8.3.4 図 第 7.3.2 図の $P_1, k (k=1\sim 5)$ を 0.1, 0.2, 0.3, 0.4 および 0.6 に調定した場合の Z_{00} の計算値 (ステップ状分布)



実線はシミュレーターの計算値を示す。破線は $S=60m, 120m, 200m$ および $400m$ に対するデジタル計算機の計算値を表すものである。

第 8.3.5 図においてもシミュレーターの計算結果はデジタル計算機による計算結果とよく一致しており、その相対誤差は実用上許される範囲にある。

結 論

第 1 部においては、渦度方程式のデジタル計算機による数値解析上の問題をとり扱った。ここで得られた成果は、つぎのとおりである。

1. 第 1 章においては、二次元および三次元における渦度方程式（予報方程式）について説明し、第 2 章以下の導入部とした。ここで渦度方程式を解くに当り、数値解析上の問題点は楕円型偏微分方程式の解法と逐次積分法の二つに大別されることを示した。
2. 第 2 章および第 3 章においては、楕円型偏微分方程式のブロック反復法について論じた。第 2 章においては、まづ行列方程式の反復解法の収束条件および収束の速さを比較するために、行列のノルム、スペクトル半径および平均収束率を定義した。第 2 章においては、5 点ブロック・ガウスザイデル法について考察し、このときの格子点の配列は調和配列をなし、最大の収束率を与えることを証明した。この方法は、一行ブロック・ガウスザイデル法に比べて、一点当りの所要演算時間が短いので、全計算時が一行ブロック・ガウスザイデル法の約 $1/5$ になることを見出した。数値計算例においても、この結果は実証されている。
3. 第 3 章においては、 ADI 法の変形として、非対称行列をパラメータに用いた $ADIN$ 法（ $ADIN$ 法）を提案した。この非対称行列のパラメータは ADJ 法の計算を一行おきに実行しようとする場合に生ずるものである。本章においては、 $ADIN$ 法の収束定理を証明し、その平均収束率を ADI 法の平均収束率の約 2 倍と推定した。数値計算例においては、ラプラスの方程式を三種の領域について解き、 ADI 法よりも、 $ADIN$ 法の方が計算回数が減少する結果を得た。この $ADIN$ 法は、対称行列をオペレーターとしてもつベクトル方程式に対して、一般的に適用できる。

4. 第4章においては、渦度方程式の中央差分および風上差分方式による解法を比較した。そして、初期値および境界値の分布が連続的であるならば、風上差分方式による解は、中央差分方式による解とよく一致することを例題について見出した。この結果、風上差分方式の実用性が確認された。風上差分方式は、渦度方程式を解く際に、境界値の取扱いを容易にし、計算安定度が厳密に求まるといふ利点をもっている。ついで、第2部において行つた、アナログ・シミュレーションによる解の判定基準として、5点領域について、二三の例題を解き、第2部の準備とした。
5. 第2部においては、渦度方程式のアナログ・シミュレーションについて研究した。一般に、二次元の渦度方程式の解法のような、非線形多元連立微分方程式をアナログ計算機によつて解くことは困難な問題である。しかしながら、アナログ方式によれば、積分が連続的にできる利点があり、比較的狭い領域に対しては、式の性質をしる上に有効な方法であると考えられる。第5章においては、アナログ・シミュレーションを行うために、渦度方程式を差分微分方程式に変換し、この方程式の安定性について論じた。
6. 第6章においては、ポアッソンの方程式およびヤコビアンの式の計算回路について考察した。ヤコビアンの式の計算には、2個の掛算回路が必要となる。本研究においては、掛算器として、三角波電圧の面積がその高さの自乗に比例する原理を用いた $1/4$ 自乗掛算器を使用した。このため、本章においては、 $1/4$ 自乗掛算器について述べ、この掛算器の誤差につき、主としてダイオードの特性によるものを解析した。この掛算器を用いた、ヤコビアン項の計算回路の特性としては、静特性および動特性を求めた。一般に、アナログ掛算器の欠点は、入力電圧が微小な場合に出力電圧の誤差が大きいことである。この点については未解決である。
7. 第7章においては、シミュレーター回路の設計について述べた。主として、演算係数について考察し、ポテンシオ・メーターの設定値を求め、回路の構成について述べた。
8. 第8章においては、シミュレーター回路による数値計算例を示した。領域は5点領域をとり、第4章において求めたデジタル計算機による計算結果と比較した。この結果、両者の計算結果はよく一致することが認められ

た。しかしながら、アナログ・シミュレーターにおける係数器の設定誤差、およびヤコビアン回路の精度の不均一によつて振巾誤差が格子点によつて不揃いであつた。これは製作誤差に主として起因するものであつて、改善の余地がある。装置の製作上の制限から、広い領域についての計算は実施出来なかつた。しかしながら、この5点単位領域に対する計算結果から、シミュレーター回路による演算も不可能ではない。

渦度方程式の数値解析の時間を短縮するにはデジタル計算機によつて乗除算を行ない。アナログ計算によつて積分を行なうハイブリッド方式が有効と考えられる。

謝 辞

本研究は、終始、京都大学工学部、林重憲教授の御懇篤なる御指導と御鞭達の下に行つたものである。ここに、衷心から感謝の意を捧げる。また、この研究について、直接の動機を与えられた星野聰助教授に厚く御礼申上げる。さらに、折にふれて、御指導と御鞭達を賜つた木嶋昭教授、卯本重郎教授、桜井彰教授、山田寿夫、高橋誠先生はじめ各先生方に厚く御礼申上げる。又シミュレーターの製作に協力して戴いた、本学電気教室卒業生朝倉和彦氏に感謝する。

この研究は、筆者が、京都大学大学院在学中に行つたものであつて、長期にわたつて、研究の機会を与えられた、防衛庁航空幕僚監部当局に対して感謝の意を表する。

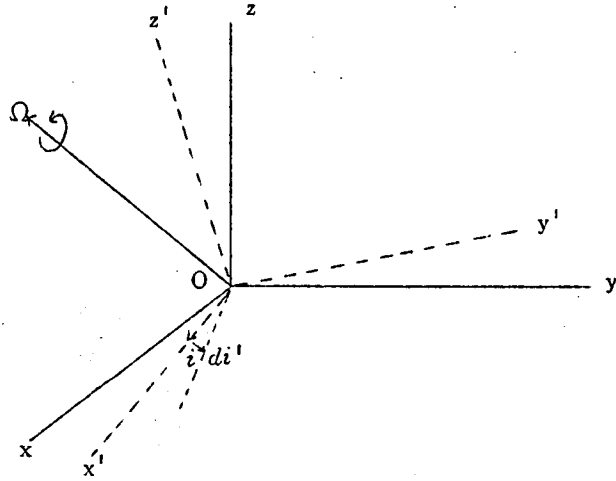
184. 項欠

付 録

186. 項欠

付録1. 固定座標系及び回転座標系におけるベクトルの微分

慣性系に対して、地球の中心に原点をもつ直角座標系を x, y, z とし、原点を共有し角速度 Ω で回転する座標系を x', y', z' とする。



付図 1. 1. 回転座標系

このとき任意のベクトル A は次のように書ける。

$$A = Ax i + Ay j + Az k = Ax' i' + Ay' j' + Az' k' \quad (A 1.1.)$$

(A 1.1.) 式を t について微分すると

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} &= \frac{dAx}{dt} i + \frac{dAy}{dt} j + \frac{dAz}{dt} k = \frac{dAx'}{dt} i' + \frac{dAy'}{dt} j' + \frac{dAz'}{dt} k' \\ &\quad + Ax' \frac{di'}{dt} + Ay' \frac{dj'}{dt} + Az' \frac{dk'}{dt} \end{aligned} \quad (A 1.2.)$$

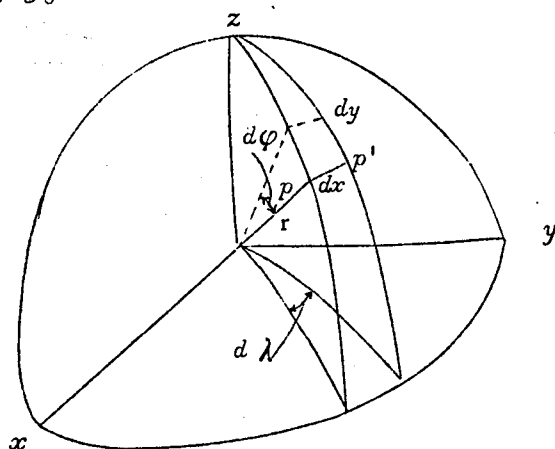
$$\text{ここで, } \frac{di'}{dt} = \Omega \times i', \quad \frac{dj'}{dt} = \Omega \times j', \quad \frac{dk'}{dt} = \Omega \times k'$$

であるから、(A 1.2.) 式に代入することによつて次式をうる。

$$\frac{dA}{dt} (\text{固定系}) = \frac{dA}{dt} (\text{回転系}) + \Omega \times A \quad (A 1.3.)$$

付録 2. (1.1.7.) (1.1.8.) 及び (1.1.9.) 式の誘導

大気の大循環は本質的に地球表面の形に従うから、大気の運動方程式を球面極座標によつて表わすこととする。大気の水平な流れはこの座標をとることによつて表現が容易になる。この座標系では質点の位置は経度 λ 、緯度 φ 及び地球の中心からの距離 r で決定される。動径にそう距離は又 $r = z + a$ であつて、ここに z は海面上の高度、 a は地球の平均半径である。ここに地球は完全球体とみなしている。今 x を東向きの球面にそう距離、 y を北向きの球面にそう距離とする。



付図 2.1. 回転極座標系

このとき付図 2.1. から明らかなように、速度の各成分は次のようになる。

$$u = a \cos \varphi \frac{d\lambda}{dt}, \quad v = a \frac{d\varphi}{dt}, \quad w = \frac{dz}{dt} \quad (\text{A 2.1.})$$

今 i, j, k を x, y, z 軸上の互いに直交する単位ベクトルとすると、速度 V は次のように書ける。

$$V = u i + v j + w k \quad (\text{A 2.2.})$$

ここで質点の運動と共にこれらの単位ベクトル i, j, k は方向を変化するので、これらの単位ベクトルは時間の関数である。

加速度を求めるために (A 2.2.) 式を微分するとつぎのようになる。

$$\frac{dV}{dt} = \frac{du}{dt} \mathbf{i} + \frac{dv}{dt} \mathbf{j} + \frac{dw}{dt} \mathbf{k} + u \frac{d\mathbf{i}}{dt} + v \frac{d\mathbf{j}}{dt} + w \frac{d\mathbf{k}}{dt} \quad (\text{A 2.3.})$$

又

$$\frac{d\mathbf{i}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{i}}{\partial x} u + \frac{\partial \mathbf{i}}{\partial y} v + \frac{\partial \mathbf{i}}{\partial z} w + \frac{\partial \mathbf{i}}{\partial t} \quad (\text{A 2.4.})$$

(A 2.4.) 式において $\partial \mathbf{i} / \partial y = \partial \mathbf{i} / \partial z = \partial \mathbf{i} / \partial t = 0$

であり、且付図 2.2. から、

$$\left| \frac{\partial \mathbf{i}}{\partial x} \right| = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|\Delta \mathbf{i}|}{|\Delta x|} = \frac{\Delta \lambda}{R \Delta \lambda} = \frac{1}{R}$$

であつて、 $\Delta \mathbf{i}$ は地軸の方を向いている。更に付図 2.3. から Δ の方向は $(\sin \varphi \mathbf{i} - \cos \varphi \mathbf{k})$ であるから

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{R} (\sin \varphi \mathbf{i} - \cos \varphi \mathbf{k})$$

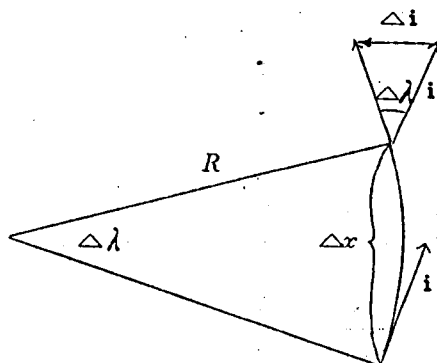
となる。従つて (A 2.4.) 式から、

$$\frac{d\mathbf{i}}{dt} = \frac{u}{a \cos \varphi} (\sin \varphi \mathbf{i} - \cos \varphi \mathbf{k}) \quad (\text{A 2.5.})$$

が成立つ。

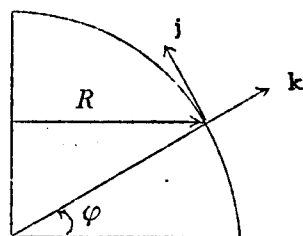
次に、

$$\frac{d\mathbf{j}}{dt} \text{ 及び } \frac{d\mathbf{k}}{dt} \text{ について考える。}$$



付図 2.2.

経度による単位ベクトル \mathbf{i} の変化



付図 2.3. 単位ベクトル \mathbf{i} 及び \mathbf{k} と角 φ の関係

付図 2.4. から,

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial x} \right| &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|\Delta \mathbf{j}|}{|\Delta x|} \\ &= \left| \frac{\Delta x}{a / \tan \varphi} \right| \left| \frac{1}{\Delta x} \right| = \frac{\tan \varphi}{a} \end{aligned}$$

$\Delta \mathbf{j}$ の方向は $-\mathbf{j}$ であるから

$$\frac{\partial \mathbf{j}}{\partial y} = -\frac{\tan \varphi}{a} \mathbf{j}$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial y} \right| &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{|\Delta \mathbf{j}|}{|\Delta y|} \\ &= \frac{\Delta \varphi}{a \Delta \varphi} = \frac{1}{a} \end{aligned}$$

$\Delta \mathbf{j}$ の方向は $-\mathbf{k}$ であるから

$$\frac{\partial \mathbf{j}}{\partial y} = -\frac{\mathbf{k}}{a}$$

となる。

同様にして

$$\frac{\partial \mathbf{k}}{\partial x} = \frac{\mathbf{j}}{a}, \quad \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial y} = \frac{\mathbf{j}}{a}$$

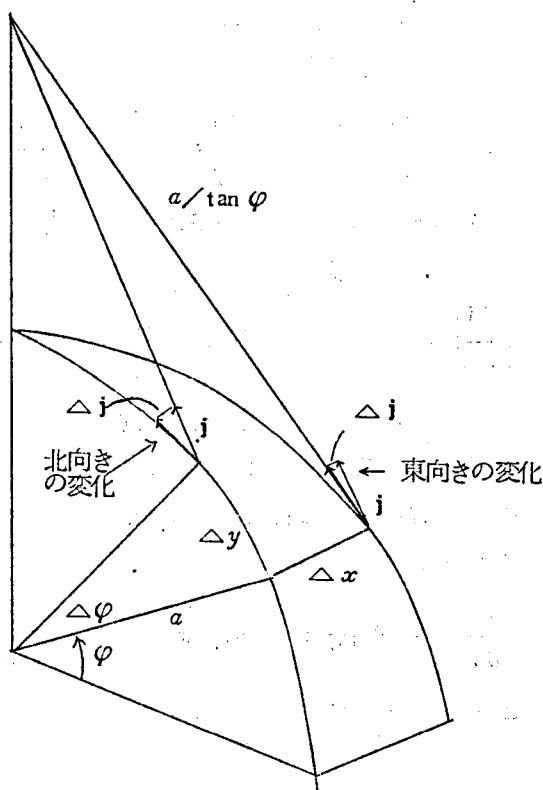
となる。従つて

$$\frac{d \mathbf{j}}{d t} = -\frac{u \tan \varphi}{a} \mathbf{j} - \frac{v}{a} \mathbf{k}$$

$$\frac{d \mathbf{k}}{d t} = \frac{u}{a} \mathbf{j} + \frac{v}{a} \mathbf{j}$$

式をうる。

(A 2.5.) 及び (A 2.6.) 式を (A 2.3.) 式に代入すると,



付図 2.4. 経度及び緯度によもなう
単位ベクトルの変化

(A 2.6.)

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} = & \left(\frac{du}{dt} - \frac{uv \tan \varphi}{a} + \frac{uw}{a} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{dv}{dt} + \frac{u^2 \tan \varphi}{a} + \frac{wv}{a} \right) \mathbf{j} \\ & + \left(\frac{dw}{dt} - \frac{u^2 + v^2}{a} \right) \mathbf{k} \end{aligned} \quad (\text{A 2.7.})$$

今、付図 2. 5. に示すように、球とみなした地球上の一点 P において接する平面上で、東向きに x 軸、北極方向に y 軸、その点における鉛直上方向に z 軸をとる。このとき回転ベクトル Ω の成分は、 $\Omega_x = 0$ 、 $\Omega_y = \Omega \cos \varphi$ 及び $\Omega_z = \Omega \sin \varphi$ であるから、コリオリの力 $-2\Omega \times V$ を C とすれば

$$C = -2\Omega \times V =$$

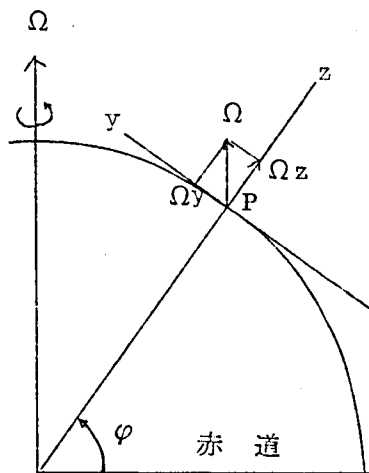
$$-2\Omega \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \\ u & v & w \end{vmatrix}$$

となる。

すなわち、

$$\left. \begin{aligned} C_x &= 2v\Omega \sin \varphi - 2w\Omega \cos \varphi \\ C_y &= -2u\Omega \sin \varphi \\ C_z &= 2u\Omega \cos \varphi \end{aligned} \right\} \quad (\text{A 2.8.})$$

上の (A 2. 7.) 及び (A 2. 8.) 式を本文の (1. 1. 6.) 式に代入すれば $g = g^* + \Omega^2 R$ なることを考慮して次式をうる。



付図 2. 5.

コリオリの力の三成分

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{du}{dt} - \frac{uv \tan \varphi}{a} + \frac{uw}{a} - 2v \Omega \sin \varphi + 2w \Omega \cos \varphi &= P_x + F_x \\
 \frac{dv}{dt} + \frac{u^2 \tan \varphi}{a} + \frac{wv}{a} + 2u \Omega \sin \varphi &= P_y + F_y \\
 \frac{dw}{dt} - \frac{u^2 + v^2}{a} - 2u \Omega \cos \varphi &= P_z + F_z - g
 \end{aligned} \right\} \quad (\text{A 2.9})$$

この式が本文の (1. 1. 7.) (1. 1. 8.) 及び (1. 1. 9.) 式である。

付録3. SOR法の最適加速係数に関する Kulsrud の推定法

(2.4.6.) 式で与えられる、ヤコビ行列 B のスペクトル半径を $\bar{\mu}$ 、(2.4.14.) 式で与えられる SOR の収束行列 L_{ω} のスペクトル半径を λ とする。行列 B の固有 μ_i 、行列 L_{ω} の固有値 λ_i および加速係数 ω との間には、次の関係がある。
$$\bar{\mu}_i^2 = \frac{(\lambda_i + \omega - 1)^2}{\omega^2 \lambda_i} \quad (\text{付 3.1.})$$

最適加速係数 ω_b は次式から求められる。

$$\omega_b = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \bar{\mu}^2}} \quad (\text{付 3.2.})$$

SOR 法は $1 \leq \omega \leq 2$ なる ω に対して収束する。

長方形領域 (境界点を含めて $n \times m$ の格子点からなる) に対しては、つぎの式からスペクトル半径 $\bar{\mu}$ を求めることが出来る。

$$\bar{\mu} = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\pi}{m-1} + \cos \frac{\pi}{n-1} \right) \quad (\text{付 3.3.})$$

しかし一般の領域に対して、 $\bar{\mu}$ を求めることは容易でない。

ω_b を決定するためには、行列 L_{ω} の固有値を計算しなければならず、この計算は長い時間を要する。

Yong は λ を求めるのに、 $\omega = 1$ についてつぎの比

$$\frac{\max_i |\phi_i^{(m)} - \phi_i^{(m-1)}|}{\max_i |\phi_i^{(m-1)} - \phi_i^{(m-2)}|}$$

を計算して、実効的に、 $m \rightarrow \infty$ なるときの極限值をとることを提案している。ここで ϕ は格子点の値を要素とするベクトルである。しかしこの方法も長時間の計算が必要である。又いろいろな ω の値を使い、同一初期値について、計算を行ない、実験的に ω_b の値を定める方法も、多大の時間と労力を要するので実用的ではない。

Kulsrud の方法は有限の計算回数 m に対して

$$\frac{\|\phi^{(m)} - \phi^{(m-1)}\|}{\|\phi^{(m-1)} - \phi^{(m-2)}\|} \quad (\text{付 3.4.})$$

が成立することに着目して

$$\|\phi^{(m)} - \phi^{(m-1)}\| = \sum_{i=1}^N |\phi_i^{(m)} - \phi_i^{(m-1)}| \quad (\text{付 3.5.})$$

として $|\lambda_1|$ を求める。ここに N は格子点の総数である。そして (付 3.1.) 式から μ_1 を求めて、(付 3.2.) 式から

$$\omega_{b,1} = \frac{2}{1 + \bar{\mu}_1} \quad (\text{付 3.6.})$$

を最適係数の近似値として採用するものである。この方法は最初、初期ベクトル $\phi^{(0)}$ に対して任意の加速係数 ω_0 で一定の回数 r 回計算した後 (付 3.4.) 式によつて λ_1 を求め、ついで (付 3.1.) 式および (付 3.6.) 式からそれぞれ $\bar{\mu}_1$ 、 $\omega_{b,1}$ を求める。この操作をくり返して $|\omega_{b,n} - \omega_{b,n-1}|$ の値が或判定値 ε よりも小さくなつた後は、最後にえられた $\omega_{b,n}$ を ω_b として計算を続けるものである。ここで n は ω_b の近似値の番号とする。この方法において ω の値はたえず増大するので、 ω_0 を ω_b より大きくえらばないように、注意しなければならない。得られた $\bar{\lambda}$ が $\omega - 1$ とひとしいときは、 $\omega \geq \omega_b$ であるから、最早 ω を変更してはならない。 $\omega_{b,n}$ を決定するための計算回数 r は (付 3.4.) 式から明らかなように 2 以上の整数である。この回数については与えられていない。⁽³⁸⁾

付録 4. (3.6.9) 式の証明

$\rho \geq 0$, $0 < x_1 < x_2$ なるとき

$\left| \frac{\rho - x_1}{\rho + x_1} \right|$ 及び $\left| \frac{\rho - x_2}{\rho + x_2} \right|$ のグラフは ρ を変数とするとき

の大小関係を吟味するため次式を考える。

$$y = \left(\frac{\rho - x_1}{\rho + x_1} \right)^2 - \left(\frac{\rho - x_2}{\rho + x_2} \right)^2$$

この次を整理すると次式をうる。

$$y = \frac{4 \rho (x_2 - x_1) (\rho^2 - x_1 x_2)}{(\rho + x_1)^2 (\rho + x_2)^2}$$

$\rho > 0$, $x_2 > x_1$ なる関係を用いると

$0 < \rho < \sqrt{x_1 x_2}$ なるとき $y < 0$ 従つて $\left| \frac{\rho - x_1}{\rho + x_1} \right| < \left| \frac{\rho - x_2}{\rho + x_2} \right|$

$\rho > \sqrt{x_1 x_2}$ なるとき $y > 0$ 従つて $\left| \frac{\rho - x_1}{\rho + x_1} \right| > \left| \frac{\rho - x_2}{\rho + x_2} \right|$

となり, (3.6.9) 式をうる。

付録 5. 非対称パラメータを用いたADI法のFORTRAN
プログラム

```
C      ADI WITH NONSYMMETRIC PARAMETER
COMMON N,Z(41,41 ),G(41,41),H(41),E(41),P(5),A,B,C
      READ(5,105)K
105 FORMAT(I4)
      1 READ(5,100) N,NP,EPS
100 FORMAT(2I4,F12.0)
      READ(5,101) (P(I),I=1,NP)
101 FORMAT (6F12.0)
      DO 2 I=1,N-1
      DO 2 J=1,N
      Z(I,J)=0.0
      G(I,J)=0.0
2 CONTINUE
      DO 3 J=1,N,N-1
      DO 3 I=2,N-1
      Z(I,J)=0.0
3 CONTINUE
      DO 4I=2,N-1
      DO 4J=2,N-1
      Z(I,J)=1.0
4 CONTINU
      LT=0
10 LP=1
22 A=2.0-P(LP)
      B=2.0+P(LP)
      C=1.0-P(LP)*0.5
      H(1)=0.0
      DO 5 I=2,N-1
```

```

H(I)=-1.0/(B+H(I-1))
G(I,N)=Z(I,N)
5 CONTINUE
DO 11 I=2,N-1,2
CALL ROW1(I)
11 CONTINUE
DO 12 I=3,N-1,2
CALL ROW2(I,LP)
12 CONTINUE
C COLUMN INVERSION
DO 14 J=2,N-1,2
CALL COLM1(J)
14 CONTINUE
DO 15 J=3,N-1,2
CALL COLM2(J,LP)
15 CONTINUE
LT=LT+1
DO 17 I=2,N-1
DO 17 J=2,N-1
RES=ABS(Z(I,J))
IF (RES-EPS) 17,17,18
17 CONTINUE
19 WRITE(6,196)LT,((Z(I,J),J=1,10),I=1,10)
196 FORMAT(1H,3HLT=,14/6H Z(I,J)/(1H,10E12.4))
K=K-1
IF (K.GT.0) GO TO 1
STOP
18 IF (LT.EQ.40) GO TO 19

```

LP=LP+1

IF (LP-NP) 22,22,10

END

SUBROUTINE ROW1(I)

COMMON N,Z(41,41),G(41,41),H(41),E(41),P(5),A,B,C

E(1)=Z(I,1)

DO 1J=2,N-1

DP=Z(I+1,J)+Z(I-1,J)-A*Z(I,J)

E(J) H(I)*(DP+E(J-1))

1 CONTINUE

DO 2 J=2,N-1

K=N+1-J

G(I,K)=E(K)-H(K)*G(I,K+1)

2 CONTINUE

END

SUBROUTINE ROW2(I,LP)

COMMON N,Z(41,41),G(41,41),H(41),E(41),A,B,C

E(1)=Z(I,1)

DO 3 J=2,N-1

DP=C*(Z(I+1,J)+Z(I-1,J)-A*Z(I,J)+P(LP)*(G(I+1,J)+(I-1,J)))/2.0

E(J)=-H(J)*(DP+E(J-1))

3 CONTINUE

DO 4 J=2,N-1

K=N+1-J

G(I,K)=E(K)*G(I,K+1)

4 CONTINUE

END

```

SUBROUTINE COLM1(J)
COMMON N,Z(41,41),G(41,41),H(41),E(41),P(41),A,B,C
E(1)=Z(1,J)
DO 5 I=2,N-1
DP=G(I,J+1)+G(I,J-1)-A*G(I,J)
E(I)=-H(I)*(DP+E(I-1))
5 CONTINUE
DO 6 I=2,N-1
K=N+1-I
Z(K,J)=E(K)-H(K)*Z(K+1,J)
6 CONTINUE
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE COLM2(J,LP)
COMMON N,Z(41,41),G(41,41),H(41),E(41),P(5),A,B,C
E(1)=Z(1,J)
DO 7 I=2,N-1
DP=C*(G(I,J+1)+G(I,J-1))-A*G(I,J)+P(LP)*(Z(I,J+1)
1+Z(I,J-1))/2.0
E(I)=-H(I)*(DP+E(I-1))
7 CONTINUE
DO 8 I=2,N-1
K=N+1-I
Z(K,J)=E(K)-H(K)*Z(K+1,J)
8 CONTINUE
END

```

\$ DATA

付録 6. 中央差分方式による渦渡方程式の解を求めるプログラム

```

C      SOLUTION OF VORTICITY EQUATION BY CENTRAL DIFFERENCE
COMMON N,Q(20),A(20),B(20),Z(20,20),X(21),OM,D
DIMENSION ZI(20,20),HB(20,20),H(20,20)HA(20,20),F(20),SM(20)
1,DH(20,20),HI(20,20),ZD(20,20),HD(20,20),FI(20),GS(20)
READ(5,100)N,G,S,T,OM,D
100 FORMAT(I4/5F12.0)
READ(5,205) (A(I),I=1,N),(B(I),I=1,N),(C(I),I=1,N)
READ(5,105) (FI(I),I=1,N)
READ(5,105) ((Z(I,J),J=1,N),I=1,N)
105 FORMAT(6F12.0)
DO 11 I=1,N
DO 10 J=1,N
ZI(I,J)=Z(I,J)
10 CONTINUE
11 CONTINUE
DO 42 I=1,N
F(I)=1.45444E-4*SIN(FI(I))
SM(I)=(1.0+SIN(1.0472))/(1.0+SIN(FI(I)))
GS(I)=G*SM(I)**2/(F(I)*S**2)
42 CONTINUE
P=1.0
DO 13 I=2,N-1
DO 12 J=2,N-1
H(I,J)=GS(I)*(Z(I,J+1)+Z(I+1,J)+Z(I,J-1)+Z(I-1,J)
1-4.0*Z(I,J)+F(I)
HI(I,J)=H(I,J)
12 CONTINUE
13 CONTINUE
DO 14 J=2,N-1

```

```

      H(I,J)=2.0*H(2,J)-H(3,J)
      H(N,J)=2.0*H(I,N-1)-H(I,N-2)
15  CONTINUE
      DO 17 I=2,N-1
      DO 16 J=2,N-1
16  HB(I,J)=H(I,J)
17  CONTINUE
      L=0
40  LR=3
      WRITE(6,101)L,((Z(I,J),J=1,N),I=1,N),((H(I,J),J=1,N),I=1,N),
      1((ZD(I,J),J=1,N),I=1,N),((HD(I,J),J=1,N),I=1,N)
101  FORMAT(1H,2HT=,I3//1H,6HZ(I,J)/11(1H,F10.4//1H,6HH(I,J)/
      111(1H,11E10.3//1H,7HZD(I,J)/11(1H,11F10.4//1H,7HHD(I,J)/
      211(1H,11E10.3//))
41  DO 19 I=2,N-1
      DO 18 J=2,N-1
      DH(I,J)=((H(I,J+1)-H(I,J-1))*(Z(I-1,J)-Z(I+1,J))-(HI-1,J)
      1-H(I+1,J))*(Z(I,J+1)-Z(I,J-1)))*GS(I)/4.0
18  CONTINUE
19  CONTINUE
      DO 23 J=2,N-1
      TM=Z(1,J-1)-Z(1,J+1)
      IF(TM.GT.0.0) GO TO 20
      DH(1,J)=2.0*DH(2,J)-DH(3,J)
      GO TO 21
20  DH(1,J)=0.0
21  TM=Z(N,J+1)-Z(N,J-1)
      IF(TM.GE.0.0) GO TO 22
      DH(N,J)=2.0*DH(N-1,J)-DH(N-1,J)
      DO TO 23
22  DH(N,J)=0.0

```



```

23 CONTINUE
  DO 27 I=2,N-1
    TM=Z(I+1,1)-Z(I-1,1)
    IF(TM.GE.O.O) GO TO 24
    DH(I,1)=2.O*DH(I,2)-DH(I,3)
    GO TO 25
24 DH(I,1)=O.O
25 TM=Z(I-1,N)-Z(I+1,N)
    IF(TM.GE.O.O) GO TO 26
    DH(I,N)=2.O*DH(I,N-1)-DH(I,N-2)
    GO TO 27
26 DH(I,N)=O.O
27 CONTINUE
  DO 29 I=2,N-1
    DO 28 J=2,N-1
      HA(I,J)=HB(I,J)+P*T*DH(I,J)
      HB(I,J)=H(I,J)
      H(I,J)=HA(I,J)
28 CONTINUE
29 CONTINUE
  P=2.O
  DO 45 I=2,N-1
    DO 46 J=2,N-1
      R(I,J)=(F(I)-H(I,J))/GS(I)
46 CONTINUE
45 CONTINUE
  WRITE(6,110)(R(I,J),J=2,N-1),I=2,N-1
110 FORMAT(1H,6HR(I,J)/9(1H,9F10.4/))
  CALL POIN
  DO 31 I=2,N-1
    DO 30 J=2,N-1

```

ZD(I,J)=Z(I,J)-ZI(I,J)
30 HD(I,J)=H(I,J)-HI(I,J)

31 CONTINUE

L=L+1

IF(L.EQ.25) GO TO 32

IR=IR-1

IF(IR.EQ.0) GO TO 40

GO TO 41

32 STOP

END

SUBROUTINE POIN

COMMON N,Q(20),A(20),B(20),C(20),Z(20,20),R(20,20),X(21),OM,D

DO 10 I=2,N-1

R(I,2)=Z(I,1)+R(I,2)

R(I,N-1)=Z(I,N)+R(I,N-1)

10 CONTINUE

RN=(N-1)**2

21 CK=0.0

DO 20 I=2,N-1

DO 11 J=2,N-1

Q(J-1)=Z(I-1,J)+Z(I+1,J)+R(I,J)

11 CONTINUE

CALL ELIM

DO 12 J=2,N-1

T=OM*X(J-1)-Z(I,J)

CK=CK+ABS(T)

Z(I,J)=T+Z(I,J)

12 CONTINUE

20 CONTINUE

T=CK/RN

IF(T.GT.D) GO TO 21

22 RETURN

END

SUBROUTINE ELIM

C SOLVE EQUATION $MX=K$

COMMON N,Q(20),A(20),B(20),C(20),Z(20,20),R(20,20),X(21),OM,D

DIMENSION W(20),G(20)

9 $W(1) = C(1) / B(1)$

$G(J) = Q(1) / B(1)$

DO 10 J=2,N-2

$W(J) = C(J) / (B(J) - A(J) * W(J-1))$

$G(J) = (Q(J) - A(J) * G(J-1)) / (B(J) - A(J) * W(J-1))$

10 CONTINUE

$X(N-2) = G(N-2)$

J=N-3

11 $X(J) = G(J) - W(J) * X(J+1)$

J=J-1

IF(J.GT.0) GO TO 11

RETURN

END

\$ DATE

付録 風上差分方式により渦度方程式の解を求めるための
プログラム

C SOLUTION OF VORTICITY EQUATION BY UPQIND DIFFERENCE

```

COMMON N,Q(20),A(20),B(20),C(20),Z(20,20),R(20,20),X(21),OM,D
DIMENSION ZI(20,20),H(20,20),F(20),SN(20),DH(20,20),HI(20,20)
1,ZD(20,20),HD(20,20),FI(20),GS(20)
READ(5,100)N,G,S,T,OM,D
100 FORMAT(I4/5F12.0)
READ(5,105) (A(I),I=1,N),(B(I),I=1,N),(C(I),I=1,N)
READ(5,105) (FI(I),I=1,N)
READ(5,105) ((Z(I,J),J=1,N),I=1,N)
105 FORMAT(6F12.0)
DO 11 I=1,N
DO 10 J=1,N
ZI(I,J)=Z(I,J)
10 CONTINUE
11 CONTINUE
DO 42 I=1,N
F(I)=1.45444E-4*SIN(FI(I))
SM(I)=(1.0+SIN(1.0472))/(1.0+SIN(FI(I)))
GS(I)=G*SM(I)**2/(F(I)*S**2)
42 CONTINUE
DO 13 I=2,N-1
DO 12 J=2,N-1
H(I,J)=GS(I)*(Z(I,J+1)+Z(I+1,J)+Z(I,J-1)+Z(I-1,J)-4.0*Z(I,J))+F(I)
HI(I,J)=H(I,J)
12 CONTINUE
13 CONTINUE
DO 14 J=2,N-1
H(1,J)=2.0*H(2,J)-H(3,J)

```

```

      H(N,J)=2.0*H(N-1,J)-H(N-2,J)
14  CONTINUE
      DO 15 I=2,N-1
      H(I,1)=2.0*H(I,2)-H(I,3)
      H(I,N)=2.0*H(I,N-1)-H(I,N-2)
15  CONTINUE
      L=0
40  IR=3
      WRITE(6,101) L,((Z(I,J),J=1,N),I=1,N),((H(I,J),J=1,N),I=1,N)
      1((ZI,J),J=1,N),I=1,N),((HD(I,J),J=1,N),I=1,N)
101  FORMAT(1H,2HT=,I3//1H,6HZ(I,J)/11(1H,11F10.4//)1H,6HH(I,J)/
111(1H,11E10.3//)1H,7HZD(I,J)/11(1H,11F10.4//)1H,7HHD(I,J)/
211(1H,11E10.3//)
41  DO 22 I=2,N-1
      DO 21 J=2,N-1
      U=-C*SM(I)*(Z(I-1,J)-Z(I+1,J))/(2.0*S*F(I))
      V=G*SM(I)*(Z(I,J+1)-Z(I,J-1))/(2.0*S*F(I))
      IF (U.GE.O.O) GO TO 18
      IF (V.GE.O.O) GO TO 19
      DH(I,J)=-SM(I)*(U*(H(I,J+1)-H(I,J))+V*(H(I-1,J)-H(I,J)))/S
      GO TO 21
19  DH(I,J)=-SM(I)*(U*(H(I,J+1)-H(I,J))+V*(H(I,J)-H(I+1,J)))/S
      GO TO 21
18  IF (V.GE.O.O) GO TO 20
      DH(I,J)=-SM(I)*(U*(H(I,J)-H(I,J-1))+V*(H(I-1,J)-H(I,J)))/S
      GO TO 21
20  DH(I,J)=-SM(I)*(U*(H(I,J)-H(I,J-1))+V*(H(I,J)-H(I+1,J)))/S
21  CONTINUE
22  CONTINUE
      DO 24 I=2,N-1
      DO 23 J=2,N-1

```

```

      H(I,J)=H(I,J)+T*DH(I,J)
23  R(I,J)=(F(I)-H(I,J))*S**2*F(I)/(G*SM(I)**2)
24  CONTINUE
      CALL POIN
      DO 26 I=2,N-1
      DO 25 J=2,N-1
      ZD(I,J)=Z(I,J)-ZI(I,J)
25  HD(I,J)=H(I,J)-HI(I,J)
26  CONTINUE
      L=L+1
      IF (L.EQ.25) GO TO 27
      LR=LR-1
      IF (IR.EQ.0) GO TO 40
      GO TO 41
27  STOP
      END

```

SUBROUTINE POIN

same as Central difference Program.

SUBROUTINE ELIM

same as Central difference Program

付録 8. 5 点領域において渦度方程式の解を求めるための
プログラム

C 5 POINT BORTICITY EQUATION

```

COMMON Z(7,7),H(7,7),DH(7,7),C(7,7),F(7),GSF(7)
READ(5,100) S,G,DT
100 FORMAT(3F12.0)
    READ(5,101) (F(I),I=1,7)
101 FORMAT (6E12.4)
    51 READ(5,102) ((Z(I,J),J=1,7),I=1,7)
102 FORMAT(7F10.0)
    WRITE(6,110) (F(I),I=1,7)
110 FORMAT(1H,4HF(I)/7E15.6)
    L=0
    DO 17 I=1,7
        GSF(I)=G/(S**2F(I))
17 CONTINUE
50 DO 18 I=2,6
    DO 19 J=2,6
        H(I,J)=GSF(I)*(Z(I+1,J)+Z(I-1,J)+Z(I,J+1)+Z(I,J-1)
        -4.0*Z(I,J)+F(I)
        H(I,J)*1.0E4
19 CONTINUE
18 CONTINUE
40 WRITE(6,105) L,((Z(I,J),J=1,7),I=1,7)
105 FORMAT(1H,2HL=,I4/6HZ(I,J)/7(1H,7E15.6/))
    WRITE(6,106) ((H(I,J),J=2,6),I=2,6)
106 FORMAT(1H,6HH(I,J),/5(1H,5E15.6/))
    IF(L.GT.72) GO TO 41
    CALL CALDH(3,4)
    CALL CALDH(4,3)

```

```

CALL CALDH(4,4)
CALL CALDH(4,5)
CALL CALDH(5,4)
H(3,4)=H(3,4)+DH(3,4)*DT
DO 24 J=3,5
H(4,J)=H(4,J)+DH(4,J)*DT
24 CONTINUE
H(5,4)=H(5,4)+DH(5,4)*DT
CALL SIGMA(3,4)
CALL SIGMA(4,3)
CALL SIGMA(4,4)
CALL SIGMA(4,5)
CALL SIGMA(5,4)
SS=S**2
B1=SS*C(4,4)
B2=SS*C(4,5)-Z(5,5)-Z(4,6)-Z(3,5)
B3=SS*C(3,4)-Z(3,5)-Z(2,4)-Z(3,3)
B4=SS*C(4,3)-Z(3,3)-Z(4,2)-Z(5,3)
B5=SS*C(5,4)-Z(5,3)-Z(6,4)-Z(5,5)
Z(4,4)-14.0*B1+B2+B3+B4+B5)/12.0
Z(4,5)=(Z(4,4)-B2)/4.0
Z(3,4)=(Z(4,4)-B3)/4.0
Z(4,3)=(Z(4,4)-B4)/4.0
Z(5,4)=(Z(4,4)-B5)/4.0
L=L+1
41 STOP
END

```

```

SUBROUTINE CALDH(I,J)

```

```

COMMON Z(7,7),H(7,7),DH(7,7),C(7,7),F(7),F(7),GSF(7)

```

```

DH(I,J)=0.25*GSF(I)*((HI,J+1)-H(I,J-1))*(ZI-1,J)-Z(I+1,J))

```


1-(H(I-1,J)-H(I+1,J))*(Z(I,J+1)-Z(I,J-1)))

RETURN

END

SUBROUTINE SIGMA(I,J)

COMMON Z(7,7),H(7,7),DH(7,7),C(7,7),F(7),GSF(7)

C(I,J)=F(I)*(H(I,J)*1.0E-4-F(I))/9.8

RETURN

END

参 考 文 献

- (1) P.D.Thompson, (1961), "Numerical wether analysis and prediction! The MacMillan Company, New York 170.
- (1a) G.J.Haltiner and F.L.Martin, (1957), "Dynamical and physical meteorology" MacGraw-Hill Co.
- (2) 岸保勘三郎、数值予報論、昭和30年、地人書館、P.94
- (3) J.G. Charney, (1949), "On a physical basis for numerical prediction of large scale motions in the atmosphere" J. of meteorol, Vol.6, pp.371-385.
- (4) J.G.Charney and A.Eliassen, (1949), "A numerical method for predicting the perturbations of the middle latitude westies" Tellus, Vol.1, pp.38-54.
- (4a) J.G.Charney, R.Fjörtoft and J. von Neumann, (1950) "Numerical integration of the barotropic vorticity equation" Tellus, Vol.2, pp.237-254.
- (4b) J.G.Charney and N.A.Phillips, (1953) "Numerical integration of the quasi-geostrophic equations for barotropic and simple barotropic flows" J.of Meteorol, Vol.10, pp.71-99.
- (5) A.Eliassen, (1952), "Simplified dynamic models of the atmosphere designed for the purpose of numerical integration" Tellus, Vol.4, pp.145-156
- (6) J.S.Sawyer and F.H.Bushby, (1953), "A barotropic model atmospher suitable for numerical integration" J. of Meteorol, Vol.10, pp.54-59.
- (7) E.T.Eady, (1952), "Note on wether computing and the so-called 2 1/2 dimensional model" Tellus, Vol.4, pp.157-167.
- (8) P.D.Thompson, (1953), "On the theory of large scale disturbances in a two dimensional baroclinic equivalent

- of the atmosphere " Quart.J.Roy. Meteorol., Soc., 79,
pp.51-69.
- (9) R.J.Arms, L.D.Gates and B.Zondec, (1956), "A method of block
iteration " J.Soc. indust. appl.Meth., Vol.4, no.4,
pp.220-229.
- (10) R.W.Varga, (1962), "Matrix iterative analysis"
Prentice-Hall Inc., Maruzen Co. Ltd., 322.
- (11) J.G.Kemny and J.L.Snell, (1960), "Finite markov chains "
D.Van Nostrand Com. Inc., Princeton, 210.
- (12) D.M.Young, (1954), "Iterative methods for solving partial
difference equations of elliptic type "
Trans. Amer. Math. Soc. 76, pp.92-111.
- (13) H.E.Kulsrud, (1961) "A practical thechnique for the
determination of the optimum relaxation factor of the
succesive over-relaxation method " Comm. Assoc. Comput.
Math., Vol.4, pp.184-187.
- (14) P.Stein and R.L.Rosenberg, (1948), "On the solution of
simultaneous equations by iteration "
J.London Math. Soc.23, pp.111-118.
- (15) A.M.Ostrowski, (1954), "On the linear iteration procedure
for symmetric matrices " Rend. Mat. e Appl. 14, pp.140-
163.
- (16) Parter, Seymour V, (1961), "Multi-line iterative methods for
elliptic difference equations and fondamental
frequencies" Numerishe Mathematik, Val.3, pp.305-319.
- (17) R.S. Varga, (1959), "Ordering of succesive overrelaxation
scheme " Pacific J.Math. Vol.9, pp.617-628.
- (18) 林重憲、立山尚武、楢円型偏微分方程式のブロック反覆法、昭和39年
電気関係学会関西支部連合大会
- (19) 林重憲、立山尚武、楢円型偏微分方程式のブロック反覆法についてⅡ、
昭和40年電気四学会連合大会

- (20) G.E.Forsythe and W.R.Wasow,(1960),"Finite difference methods for partial differential equations' John wiley & sons Inc. New York, 444.
- (21) W.D.Peacemann and H.H.Rachford Jr,(1955),"The Numerical solution of parabolic and elliptic differential equations' J.Soc. Indust. Appl. Math. Vol.3, No.1 pp.2841.
- (22) E.L.Wachspress and G.J.Habetler,(1960),"An alternating-direction-implicit iteration technique! J.Soc.Indust. Apple.Math., Vol.8, No.2, pp.403-424.
- (23) E.L.Wachspress,(1962),"Optimum alternating-direction-implicit iteration parameters for a model problem" J. Soc. Indust. Appl.Math. Vol.10, No.2, pp.339-350.
- (24) J.Heller,(1960)"Simultaneous, successive and alternating direction iteration schemes." J.Soc. Indust. Appl. Math. Vol.8, pp.150-173.
- (25) G.Birkhoff, R.S.Varga and D.M.Young, Jr., "Alternating-direction-Implicit methods, Advances in computers, Vol. 3." Academic Press, New York. 1962.
- (26) 林重憲、立山尚武、非対称パラメーターを用いたADI法、昭和41年情報処理学会大会
- (26a) 林重憲、立山尚武、非対称パラメーターを用いたADI法、昭和41年電気四学会関西支部大会
- (27) C.B.Sensening,(1959),"Existence and uniqueness for a third order non-linear partial differential equation." Report IMM-NYU 258, Institute of math. sciences, New York University.
- (28) J.G.Charney,R.Fjörtoft and J.von Neumann,(1950) "Numerical integration of the barotropic vorticity equation." Tellus, Vol.2, pp.237-254.
- (29) R.Courant, K.Friedrichs and H.Lewy,(1928),"Über die

partiellen differenzengleichungen der mathematischen
 phisik." Math. Ann., Vol.100, pp.32-74. (A translation
 by Phyllis Fox has been multilithed under the tittle On
 the partial difference equations fo mathematical
 physics, Report NYO-7689, Institute of mathematical
 science, New York University, 1956.

- (30) Fritz John, (1952), "On integration of parabolic equations
 by difference methods, 1.Linear and quasi-linear
 equations for the infinite interval." Comm. Pure Appl.
 Math., Vol.5, pp.155-211.
- (31) 林重憲、立山尙武、渦度方程式の風上差分による解について、昭和40
 年度情報処理学会大会、P.67
- (32) 林重憲、立山尙武、渦度方程式の中央差分および風上差分による解の比
 較、昭和41年電気四学会連合大会、P.1496
- (33) 野村民也、三浦武雄、アナログ電子計算機、(1960) コロナ社
- (34) G.A.Korn and T.M.Korn, (1956), "Electronic analog computers."
 McGraw-Hill Co. New York.
- (35) 栗屋潔、公平良三、斉藤安弘、ラプラスの偏微分方程式のアナログ、コ
 ンピューターによる解法、昭和40年電気四学会連合大会、
 P.682
- (36) 三浦武雄、沼倉俊郎、衣川武、アナログ、コンピュータの非線型要素の
 試作と検討、電気学会雑誌、昭和30年5月
 PP.481-487
- (37) G.A.Korn and T.M.Korn, (1964), "Electronic analog and hybrid
 computers." New York, McGraw-Hill.
- (38) 清野武、電子計算機によるラプラスの方程式の解法—特に加速係数の推
 定について、京都大学工学部電気・電子教室、研究談話会記録
 No 100
- (39) N.Tateyama, J.Umoto and S.Hayashi, "The numerical experiment
 on the alternating direction implicit method using
 interlacing scanning for elliptic partial differential

equations." Memoir of faculty of eng. of Kyoto Univ.,
April 1967.

- (40) 林重憲、星野 聰、立山尚武、天気予報方程式のシミュレーションについて、昭和37年度電気関係学会関西支部連合大会
- (41) 林重憲、星野 聰、立山尚武、天気予報方程式のシミュレーションについて、(オ2報)、昭和38年電気四学会連合大会
- (42) 林重憲、立山尚武、渦度方程式の各種差分方式による解の比較、昭和41年電気四学会連合大会